ideCAD
Sonlu Elemanlar Teknik Kılavuzu

Versiyon 8.xxx

Revizyon tarihi: Haziran 2015

I- ÖN KOŞULLAR 5

I-1 Sonlu eleman matrisleri 7
Sonlu elemanlar metodunda genel tanımlar 7
Virtüel iş teoremi 8
Doğrusal rijitlik matrisi 9
Doğrusal olmayan tanjant rijitlik matrisi ve geometrik rijitlik matrisi 9
Dinamik analiz 11

I-2 Biçim fonksiyonları 13
2-noktalı kenar (doğrusal) 13
3-noktalı kenar (ikinci dereceden) 13
3-noktalı üçgen (doğrusal) 14
4-noktalı dörtgen (çift doğrusal) 14
6-noktalı üçgen (ikinci dereceden) 15
9-noktalı dörtgen (dördüncü dereceden) 15
4-noktalı dörtyüzlü (doğrusal) 16
5-noktalı piramit (doğrusal) 16
6-noktalı kama (doğrusal) 17
8-noktalı altıyüzlü (doğrusal) 17
10-noktalı dörtyüzlü (ikinci dereceden) 18
14-noktalı piramit (ikinci dereceden) 18
18-noktalı kama (ikinci dereceden) 19
27-noktalı altıyüzlü (ikinci dereceden) 19

II- 1D ELEMANLAR 21

II-1 Kiriş elemanlar 23
Doğrusal kiriş elemanlar 23
Doğrusal olmayan kiriş elemanlar 30

II-2 Çubuk elemanlar 33
Doğrusal çubuk elemanlar 33
Doğrusal olmayan çubuk elemanlar 36

II-3 1D yayılı yay elemanlar 39
Yayılı doğrusal yay elemanlar 39

II-4 Çizgisel kütle elemanlar 41

II-5 Kiriş kütle elemanlar 43

III- 2D ELEMANLAR 45

III-1 Membran elemanlar 47
Doğrusal membran elemanlar 47
Doğrusal olmayan membran elemanlar 49

III-2 Plak elemanlar 51
Doğrusal plak elemanlar 51
Doğrusal olmayan plak elemanlar 54

III-3 Kabuk elemanlar 57
Doğrusal kabuk elemanlar 57
Doğrusal olmayan kabuk elemanlar 62

III-4 Düzlemsel şekil değiştirme elemanları 65
Doğrusal düzlemsel deformasyon elemanları 65
Doğrusal olmayan düzlemsel deformasyon elemanları 67

III-5 3D eksenel simetrik elemanlar 69
Doğrusal eksenel simetrik elemanlar 69
Doğrusal olmayan eksenel simetrik elemanlar 71

III-6 Burulmaya çalışan eksenel simetrik elemanlar 73
Burulmaya çalışan doğrusal eksenel simetrik elemanlar 73

III-7 Yayılı 2D yay elemanlar 75
Doğrusal yayılı yay elemanlar 75
III-8 Yüzeysel kütle elemanlar 77
III-9 Kabuk kütle elemanlar 79

IV- DİĞER ELEMANLAR 81
IV-1 Yaylar 83
IV-2 Burulma yayı 84
IV-3 Bağlantılar 85
IV-4 Doğrusal olmayan bağlantılar 86
IV-5 Burulma bağlantısı 88
IV-6 Noktasal blokaj yaylar 89
IV-7 Bağ-çubukları 90
IV-8 Temaslar (düzlemsel/silindirik/küresel) 91
IV-9 Rijit cisimler (doğrusal ve doğrusal olmayan) 92
IV-10 Rijit diyaframlar (doğrusal ve doğrusal olmayan) 93
IV-11 Kablolar (rijit ve rijit olmayan) 94
IV-12 Mafsal (yavaşça gevşeyen) 95
IV-13 Zayıf etkileşimli kaçıklık 96
IV-14 Noktasal kütle 97
IV-15 Viskoz sönümleyici 98
IV-16 Kullanıcı tanımlı rijitlik 99
IV-17 Kullanıcı tanımlı kütle 100
IV-18 Kullanıcı tanımlı sönüm 101
IV-19 Rayleigh sönümü 102

I- ÖN KOŞULLAR

I-1 SONLU ELEMAN MATRİSLERİ

Bu bölümde Sonlu Elemanlar Yöntemi'nin (FEM) bazı temel kavramları açıklanmış ve kılavuz içerisinde kullanılan simgeler tanıtılmıştır.

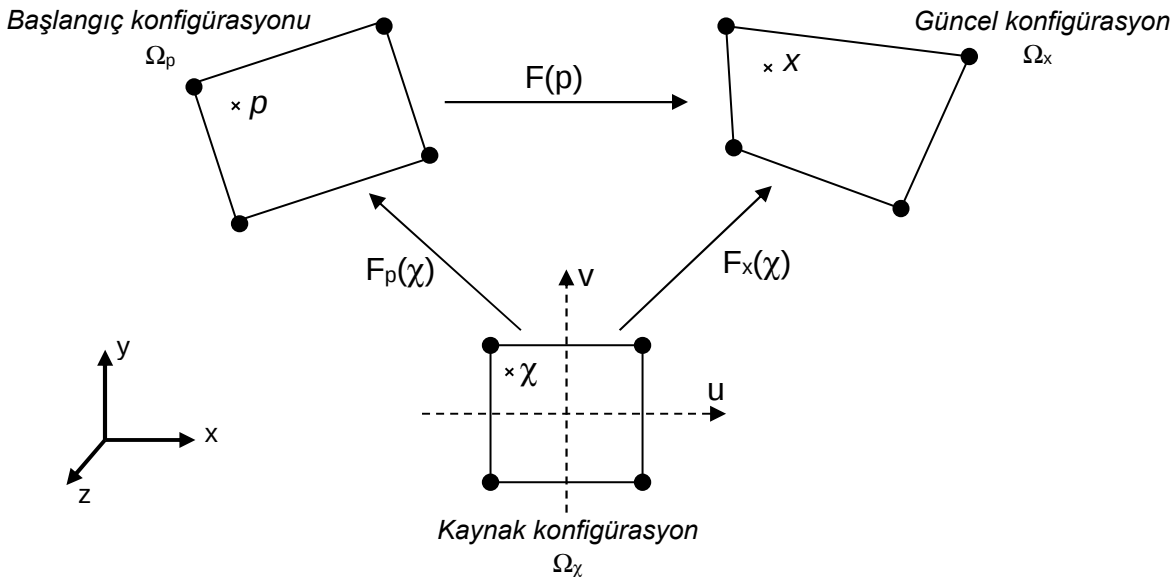
SONLU ELEMANLAR METODUNDA GENEL TANIMLAR

Sistemin üç farklı konfigürasyonu sunulmaktadır:

- *Başlangıç* konfigürasyonu olan Ω_p , hareket etmemiş sistemin malzeme noktalarıdır.
- *Güncel* konfigürasyon olan Ω_x , yer değiştirme yapmış sistemin malzeme noktalarıdır.
- *Kaynak* konfigürasyon olan Ω_χ , parametre temeli olarak kullanılmaktadır (teorik "indirgenmiş" konfigürasyon).

Ω_χ ile Ω_p arasında olan lokal deformasyonlar F_p ile gösterilmektedir.
Ω_χ ile Ω_x arasında olan lokal deformasyonlar F_x ile gösterilmektedir.
Ω_p ile Ω_x arasında olan lokal deformasyonlar F ile gösterilmektedir.
Sonuncu deformasyon malzeme şekil değiştirmelerine ve malzeme gerilmelerine yol açmaktadır. Diğer iki deformasyonun ise hiçbir fiziksel anlamı yoktur.

$$F_p(\chi) = D_\chi p$$
$$F_x(\chi) = D_\chi x$$
$$F(p) = D_p x = F_x \, F_p^{-1}$$



Bu şekil değiştirmelerin ayrıca determinantları da sunulmaktadır:

$$J_p = \det(F_p)$$
$$J_x = \det(F_x)$$
$$J = \det(F)$$

Sisteme uygulanan kuvvetler sebebiyle başlangıç konfigürasyonundaki bir nokta olan *p*, güncel konfigürasyonundaki *x* noktasına *u* deplasmanı kadar ötelenir:

$$x = p + u(p)$$

Bu nedenle, lokal deformasyonlar şu şekilde yazılır:

$$F(p) = I + D_p u$$

Green-Lagrange tensörü, iki malzeme konfigürasyonu arasındaki şekil değiştirme için yaygın olarak kullanılan bir tanımlamadır:

$$E(u) = \frac{1}{2}\left(F^T F - I\right)$$

$$E(u) = \frac{1}{2}\left(D_p u + D_p u^T + D_p u^T \, D_p u\right)$$

Küçük deformasyon teorisinde, ikinci mertebe terimi ihmal edilerek doğrusal şekil değiştirme tensörü şu şekilde yazılır:

$$\varepsilon(u) = \frac{1}{2}\left(D_p u + D_p u^T\right)$$

VİRTÜEL İŞ TEOREMİ

Sistemin statik mekanik denge denklemi, virtüel iş teoremi (zayıf formu) kullanılarak şöyle yazılır:

$$W(u,v) = F^{\text{int}}(u,v) + F^{\text{ext}}(u,v) = 0 \qquad \text{tüm } v \text{ "test" tanım alanı için}$$

[1] dikkate alınarak:

$$F^{\text{int}}(u,v) = -\int_{\Omega_x} \sigma_x(u)\, \varepsilon_x(v)\, d\Omega_x$$

$$F^{\text{ext}}(u,v) = \int_{\Omega_x} \mathbf{f}_x \; v \, d\Omega_x$$

Cauchy gerilme tensörü olan σ, güncel (yer değiştirmiş ve deforme olmuş) konfigürasyondaki esas gerilmedir.

☞ Dış yüklerin güncel konfigürasyona bağımlı olmadığı kabul edilir. Örnek olarak dış yüklerin yaptıkları iş, başlangıç konfigürasyonunda aynı şekilde yazılabilir (ölü yükler hipotezi)[2].

$$F^{\text{ext}}(v) = \int_{\Omega_p} \mathbf{f} \; v \, d\Omega_p$$

Bu integraller bazı matematik hesaplamalarının yardımıyla kaynak konfigürasyonda şöyle yazılabilir:

[1] *Dış işler burada sadeleştirilmiş bir halde yazılmıştır. Noktasal yükler, uç yükler vb. ayrıca dikkate alınabilir...*

[2] *Bu durum, ağırlık yükü ya da sabit noktasal kuvvet halidir. Ancak, bir akışkanın bir yüzey üzerindeki basıncı ölü yük değildir. Yönü yüzeyin normalini takip eder ve şiddeti, yüzey genişledikçe ya da küçüldükçe değişir.*

$$F^{\text{int}}(u,v) = -\int_{\Omega_\chi} S\ D_u E(v)\ J_p\ d\Omega_\chi \qquad (1)$$

$$F^{\text{ext}}(v) = \int_{\Omega_\chi} \mathbf{f}\ v\ J_p\ d\Omega_\chi$$

Green-Lagrange şekil değiştirme tensörü, *E* ve *Piola-Kirchhoff 2* gerilme tensörü, *S* dikkate alındığında:

$$S = J_x\ F^{-1} \sigma\ F^{-T}$$
$$\sigma = \frac{1}{J_x} F\ S\ F^T \qquad (2)$$

$D_u E(v)$ ise *v* yönünde *u* tanım alanını esas alan *E* 'nin türevini belirtmektedir.

DOĞRUSAL RİJİTLİK MATRİSİ

Doğrusal teoride *E*, ε ile ve *S* de σ ile yaklaşık olarak değerlendirilir.
C elastisite tensörü iken (4. dereceden tensör)[3], doğrusal gerilme-şekil değiştirme bağıntısının $\sigma = C\ \varepsilon$ olduğu kabul edilir. Bu durumda denklem *(1)* şu şekilde yazılabilir:

$$F^{\text{int}}(u,v) = -\int_{\Omega_\chi} \varepsilon(u)\, C\ \varepsilon(v)\ J_p\ d\Omega_\chi$$

F^{int} u ve v içerisinde doğrusaldır:

$$F^{\text{int}}(u,v) = -v^T\ \mathbf{K}^L\ u$$

$\mathbf{K}^L$, sistemin doğrusal rijitlik matrisidir ve yer değiştirme tanım alanı *u* 'ya bağımlı değildir.

DOĞRUSAL OLMAYAN TANJANT RİJİTLİK MATRİSİ VE GEOMETRİK RİJİTLİK MATRİSİ

Doğrusal olmayan *(1)* numaralı denkleme geri dönüp *u* için bir çözüm bulduğumuzu varsayalım. Dış yükleri çok az miktarda arttırmakla: $\mathbf{f} \rightarrow \mathbf{f} + d\mathbf{f}$, *u* çözümü *u* + *w* şekline dönüşür. Yeni denge denklemi yazıldığında ve sadece birinci dereceden terimler korunduğunda denklem *(1)* şu şekilde elde edilir:

$$D_u F^{\text{int}}(w) = -\int_{\Omega_\chi} \left[\left(D_u S(w) : D_u E(v) \right) + \left(S : D_u^2 E(v,w) \right) \right] J_p\ d\Omega_\chi$$

Eğer *E* ile *S* arasında doğrusal bir gerilme-şekil değiştirme ilişkisinin olduğu tekrar kabul edilirse:

S = C *E*

bu şekilde:

[3] *Basitleştirme amacıyla burada termal- ya da ön-şekil değiştirmeler çıkartılmıştır.*

$$D_u F^{\text{int}}(w) = -\int_{\Omega_\chi} \left[\left(D_u E(w) : C : D_u E(v) \right) + \left(S : D_u^2 E(v,w) \right) \right] J_p \, d\Omega_\chi \qquad (3)$$

elde edilir. Böylece:

$$D_u F^{\text{int}}(w) = -v^T \left(\mathbf{K}^I + \mathbf{K}^\sigma \right) w$$

ile birlikte:

$$\mathbf{K}^I = \int_{\Omega_\chi} \left(D_u E : C : D_u E \right) J_p \, d\Omega_\chi \qquad (4)$$

$$\mathbf{K}^\sigma = \int_{\Omega_\chi} \left(S : D_u^2 E(v,w) \right) J_p \, d\Omega_\chi \qquad (5)$$

$\mathbf{K}^I$, *başlangıç rijitlik matrisi* olarak adlandırılır ve $\mathbf{K}^L$ (doğrusal rijitlik matrisi) ile *u* içindeki bazı doğrusal ve ikici dereceden terimlerin toplamı olarak yazılabilir: $\mathbf{K}^Q$

$$\mathbf{K}^I = \mathbf{K}^L + \mathbf{K}^Q$$

$\mathbf{K}^\sigma$, *geometrik matris* (ya da başlangıç gerilme matrisi) olarak adlandırılır ve doğrusal olarak *S* 'e bağlıdır. Bu matris, gerilme pekleşmesi olarak tanımlanan durumun da sebebini oluşturur çünkü *S* > 0 olduğunda (ör. *σ* > 0) genellikle başlangıç rijitlik matrisine bir miktar pozitif ek rijitlik vermektedir.
Tüm matris *tanjant matrisi* olarak adlandırılır ve *u* yer değiştirme ile *S* gerilme değerleriyle birlikte büyük ölçüde değişiklik gösterebilir.

$$\mathbf{K}^T = \underbrace{\mathbf{K}^L + \mathbf{K}^Q}_{\mathbf{K}^I} + \mathbf{K}^\sigma$$

Yapısal kararsızlık (burkulma) durumu *det* ($\mathbf{K}^T$) ≤ 0 olduğunda meydana gelir. Bu karasızlığı tetikleyen yük katsayısı, Newton-Raphson algoritmasının birçok iterasyonuyla bulunabilir. Ancak bu işlem, kararsızlık öncesinde sistemin küçük deplasmanlara ve küçük şekil değiştirmelere maruz kaldığı varsayımıyla daha basit ve hesapsal açıdan daha efektif bir yolla yapılabilir[4]. Bu durumda $\mathbf{K}^I$, $\mathbf{K}^L$ ile ve $\mathbf{K}^\sigma$(u) da $\mathbf{K}_0^\sigma$ ile ifade edilen $\mathbf{K}^\sigma$(u=0) ile yaklaşık olarak tahmin edilir:

$$\mathbf{K}_0^\sigma = \int_{\Omega_\chi} \left(\sigma : D_u^2 E_{u=0}(v,w) \right) J_p \, d\Omega_\chi$$

Sonuç olarak, genelleştirilmiş özdeğer problemi çözülerek burkulma yük katsayısı, λ değerleri ve ilgili modlar, Φ bulunur:

$$\mathbf{K}^L \Phi + \lambda \mathbf{K}_0^\sigma \Phi = 0 \qquad (6)$$

[4] *Bu durum bazen* Euler *burkulma problemi olarak da adlandırılır. Bunun sadece yapı sisteminin göçme öncesinde küçük şekil değiştirmeler/küçük deplasmanlar tanım alanında kaldığı durumlar için ve sadece ölü yükler etkisinde geçerli olduğu not alınmalıdır.*

DİNAMİK ANALİZ

Virtüel iş teoremi dinamik formunda şu şekilde yazılabilir:

$$W(u,v) = F^{\text{int}}(u,v) + F^{\text{ext}}(u,v) + F^{\text{inert}}(u,v) = 0 \qquad \text{tüm v "test" tanım alanı için}$$

ile birlikte:

$$F^{\text{inert}}(u,v) = \int_{\Omega_x} \rho_x \; \ddot{u} \, v \; d\Omega_x$$

Kütlenin korunumu kanunu sebebiyle eylemsizlik integrali şu şekilde yazılır:

$$F^{\text{inert}}(u,v) = \int_{\Omega_p} \rho_p \; \ddot{u} \, v \; d\Omega_p$$

bu doğrultuda:

$$F^{\text{inert}}(u,v) = \int_{\Omega_\chi} \rho_p \; \ddot{u} \, v \; J_p d\Omega_\chi \qquad (7)$$

Eğer yapının bir modal titreşimini ele alırsak $\dot{u}$ tanım alanı şu şekilde yazılır:

$$\dot{u} = -\omega^2 u$$

bu doğrultuda:

$$F^{\text{inert}}(u,v) = -\omega^2 \int_{\Omega_\chi} \rho_p \; u \, v \; J_p d\Omega_\chi \qquad (8)$$

Bu ifadenin *u* dikkate alınarak türevi alındığında, *kütle matrisi* M şu şekilde elde edilir:

$$D_u F^{\text{inert}}(w) = -\omega^2 \; v^T \; \mathbf{M} \; w$$

$$\mathbf{M}(u,v) = v^T \; \mathbf{M} \; u = \int_{\Omega_\chi} \rho_p \; u \, v \; J_p d\Omega_\chi \qquad (9)$$

M matrisinin u ve v alanlarından bağımsız olduğu göz önüne alınır[5].

Bir serbest titreşim analizi için çözülmesi gereken problem şudur:

$$\mathbf{K}^T \Phi - \omega^2 \mathbf{M} \Phi = 0$$

Bu da küçük şekil değiştirme/küçük yer değiştirme (SS/SD) durumunda şu hali alır:

$$\mathbf{K}^{\text{L}} \; \Phi - \omega^2 \; \mathbf{M} \Phi = 0 \qquad (10)$$

[5] *Durumun kirişlerle ve kabuklarla birlikte kütle matrisine birkaç doğrusal olmayan terimin eklenmesini gerektirmesine rağmen. Şu anda M matrisi sabittir.*

Transient dinamik analizde $\ddot{u}$ ivmesi, u ve $\dot{u}$ içerisinde yer alan bir ifade ile yaklaşık olarak belirlenir (*Newmark* yaklaşımı). Bazı cebirsel hesaplamalarla birlikte bundan aynı M küle matrisine ulaşılır.

Bir sönümleme matrisi olan C de tanımlanmıştır. Viskoz sönümleme için, C matrisi M matrisiyle aynı biçimdedir:

$$C(\dot{u},v) = v^T \, \mathbf{C} \, \dot{u} = \int_{\Omega_\chi} c \, \dot{u} \, v \, J_p \, d\Omega_\chi \qquad (11)$$

Farklı bir matris olan C de, K^L ve M matrislerinin doğrusal kombinasyonu olarak uygun bir şekilde kullanılabilir (*Rayleigh* sönümü).

	Doğrusal statik analiz	**Modal analiz**	**Transient dinamik analiz (Newmark)**	**Euler burkulma analizi**	**Doğ. olmayan Newton-Raphson**
K^L Doğrusal başlangıç matrisi	✓	✓	✓	✓	
K^T Doğ. olmayan tanjant matrisi	✓	✓	✓	✓	✓
$\mathbf{K}_0^\sigma$ Başlangıç geomekrik matrisi				✓	
M Kütle matrisi		✓	✓		
C Sönüm matrisi			✓		

Table 1- Birçok farklı tip analizde kullanılan matrisler.

Not:

Doğrusal olmayan modeller ve statik, modal, transient dinamik ya da burkulma analizlerinde kullanıcı tarafından başlangıç yer değiştirme durumu girdisi tanımlanmışsa, doğrusal başlangıç rijitliği yerine doğrusal olmayan tanjant rijitlik kullanılır. Bu, başlangıç durumu sebebiyle olan doğrusal olmayan terimler dikkate alınarak doğrusal bir analiz (statik, modal ya da burkulma) yapılmasını mümkün kılar.

I-2 BİÇİM FONKSİYONLARI

Programın sonlu elemanları, hem noktaların aradeğerlemesi hem de serbestlik derecelerinin (DOFs) aradeğerlemesi için aşağıda listelenmiş standart biçim fonksiyonlarını temel almaktadır[6]. Sonlu elemanlarının büyük bir çoğunluğu aslında *isoparametrik* özelliktedir.

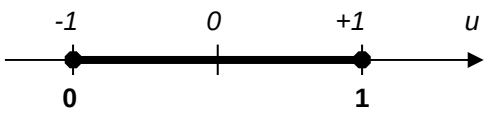
Yer değiştirme alanları (ve dönme vektörleri) yaklaşık olarak şu şekilde hesaplanır:

$$u(\chi) = \sum_I N_I(\chi)\, u_I$$

Tanım alanının *serbestlik derecesi değerleri*, u_I olarak tanımlanmaktadır.

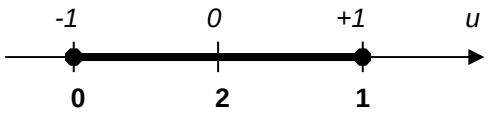
Daha önceki rijitlik ve kütle matrislerinde *v* ve *w* için olan bu tanımlamaların bir *sayısal integrasyon* ile birlikte yer değiştirilmesiyle, sonlu elemanlar metodunu kullanan yazılımının içinde programlanan sonlu eleman matrisleri elde edilmektedir.

2-NOKTALI KENAR (DOĞRUSAL)



$$\begin{cases} N_0(u) = \dfrac{1}{2}(1-u) \\ N_1(u) = \dfrac{1}{2}(1+u) \end{cases} \qquad (1)$$

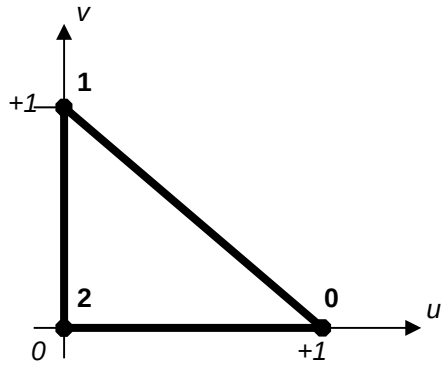
3-NOKTALI KENAR (İKİNCİ DERECEDEN)



$$\begin{cases} N_0(u) = 0.5\, u\,(u-1) \\ N_1(u) = 0.5\, u\,(u+1) \\ N_2(u) = 1-u^2 \end{cases} \qquad (2)$$

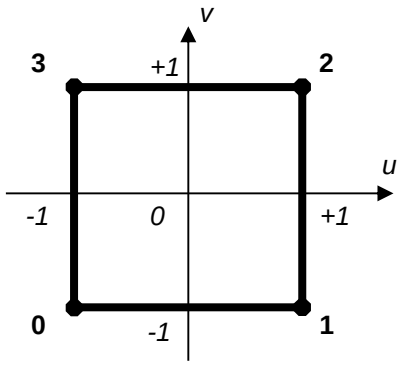
[6] *Noktaların lokal numaralandırması daha değişik olabilir.*

3-NOKTALI ÜÇGEN (DOĞRUSAL)



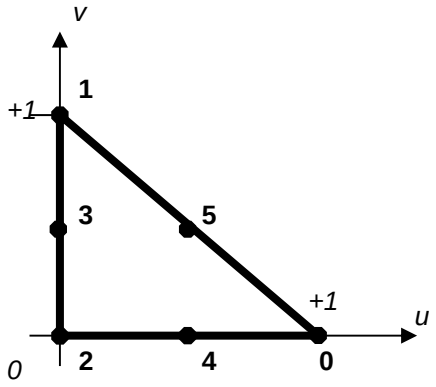
$$\begin{cases} N_0(u,v) = u \\ N_1(u,v) = v \\ N_2(u,v) = w = 1 - u - v \end{cases} \qquad (3)$$

4-NOKTALI DÖRTGEN (ÇİFT DOĞRUSAL)



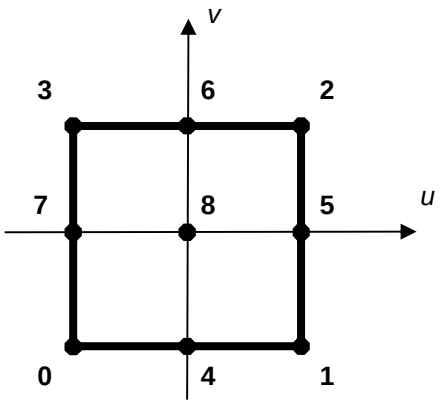
$$\begin{cases} N_0(u,v) = 0.25\,(1-u)(1-v) \\ N_1(u,v) = 0.25\,(1+u)(1-v) \\ N_2(u,v) = 0.25\,(1+u)(1+v) \\ N_3(u,v) = 0.25\,(1-u)(1+v) \end{cases} \qquad (4)$$

6-NOKTALI ÜÇGEN (İKİNCİ DERECEDEN)



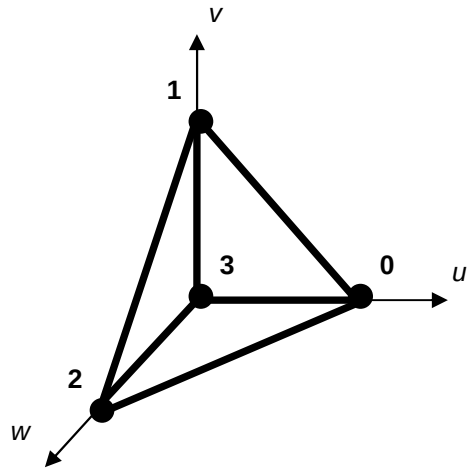
$$\begin{cases} N_0(u,v) = u(2u-1) \\ N_1(u,v) = v(2v-1) \\ N_2(u,v) = w(2w-1) \\ N_3(u,v) = 4vw \\ N_4(u,v) = 4uw \\ N_5(u,v) = 4uv \end{cases} \qquad (5)$$

9-NOKTALI DÖRTGEN (DÖRDÜNCÜ DERECEDEN)



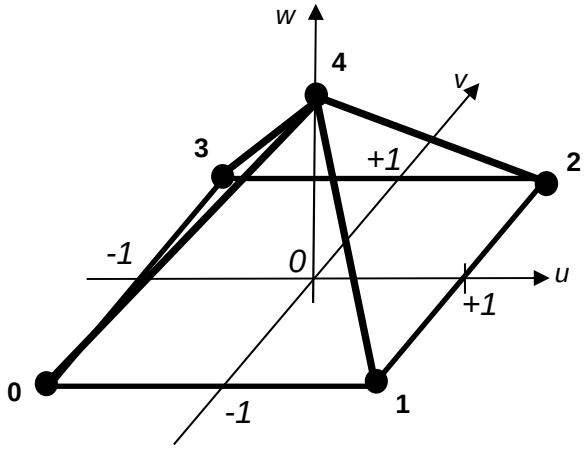
$$\begin{cases} N_0(u,v) = 0.25\,u(u-1)v(v-1) \\ N_1(u,v) = 0.25\,u(u+1)v(v-1) \\ N_2(u,v) = 0.25\,u(u+1)v(v+1) \\ N_3(u,v) = 0.25\,u(u-1)v(v+1) \\ N_4(u,v) = 0.5\,(1-u^2)v(v-1) \\ N_5(u,v) = 0.5\,(1-v^2)u(u+1) \\ N_6(u,v) = 0.5\,(1-u^2)v(v+1) \\ N_7(u,v) = 0.5\,(1-v^2)u(u-1) \\ N_8(u,v) = (1-v^2)(1-u^2) \end{cases} \qquad (6)$$

4-NOKTALI DÖRTYÜZLÜ (DOĞRUSAL)



$$\begin{cases} N_0(u,v,w) = u \\ N_1(u,v,w) = v \\ N_2(u,v,w) = w \\ N_3(u,v,w) = 1-u-v-w \end{cases} \qquad (7)$$

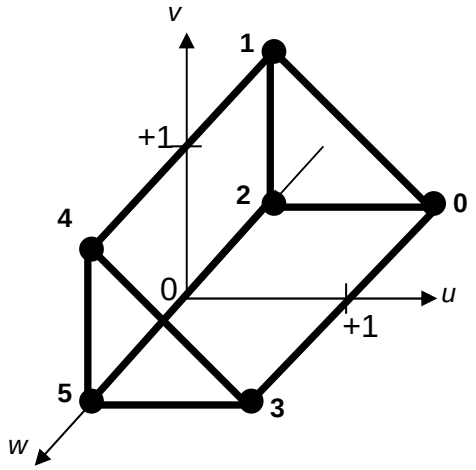
5-NOKTALI PİRAMİT (DOĞRUSAL)



$$\begin{array}{ll} N_i^{(4)}\left(\dfrac{u}{1-w},\dfrac{v}{1-w}\right) N_0^{(2)}(2w-1) & i = 0-3 \\ N_1^{(2)}(2w-1) & i = 4 \end{array} \qquad (8)$$

2-noktalı kenar biçim fonksiyonları (denklem *(1)*) ile birlikte 4-noktalı biçim fonksiyonlarının (denklem *(4)*) ürünleri.

6-NOKTALI KAMA (DOĞRUSAL)

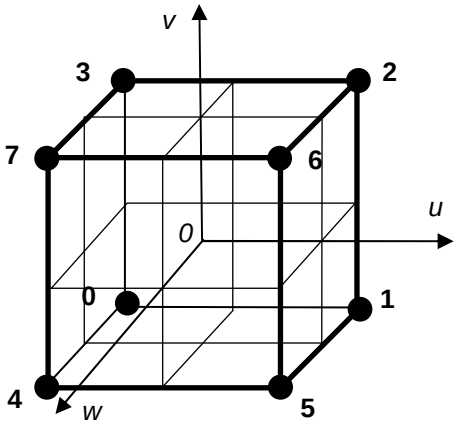


$$\begin{cases} N_0(u,v,w) = \frac{1}{2}\, u\ (1-w) \\ N_1(u,v,w) = \frac{1}{2}\, v\ (1-w) \\ N_2(u,v,w) = \frac{1}{2}\, t\ (1-w) \\ N_3(u,v,w) = \frac{1}{2}\, u\ (1+w) \\ N_4(u,v,w) = \frac{1}{2}\, v\ (1+w) \\ N_5(u,v,w) = \frac{1}{2}\, t\ (1+w) \end{cases} \qquad (9)$$

$$ile; \quad t = 1-u-v$$

2-noktalı kenar biçim fonksiyonları (denklem *(1)*) ile birlikte 3-noktalı biçim fonksiyonlarının (denklem *(3)* ve *(4)*) ürünleri.

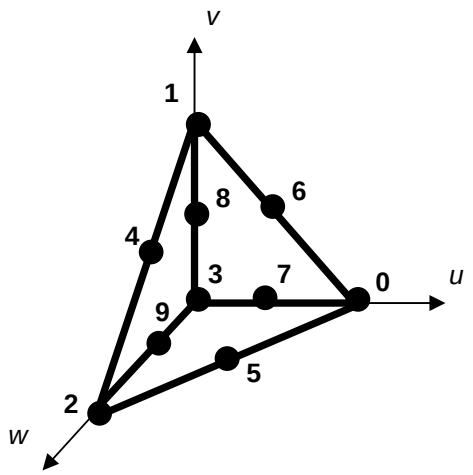
8-NOKTALI ALTIYÜZLÜ (DOĞRUSAL)



$$\begin{cases} N_0(u,v,w) = \frac{1}{8}(1-u)(1-v)(1-w) \\ N_1(u,v,w) = \frac{1}{8}(1+u)(1-v)(1-w) \\ N_2(u,v,w) = \frac{1}{8}(1+u)(1+v)(1-w) \\ N_3(u,v,w) = \frac{1}{8}(1-u)(1+v)(1-w) \\ N_4(u,v,w) = \frac{1}{8}(1-u)(1-v)(1+w) \\ N_5(u,v,w) = \frac{1}{8}(1+u)(1-v)(1+w) \\ N_6(u,v,w) = \frac{1}{8}(1+u)(1+v)(1+w) \\ N_7(u,v,w) = \frac{1}{8}(1-u)(1+v)(1+w) \end{cases} \qquad (10)$$

2-noktalı kenar biçim fonksiyonlarının (denklem *(1)*) ürünleri.

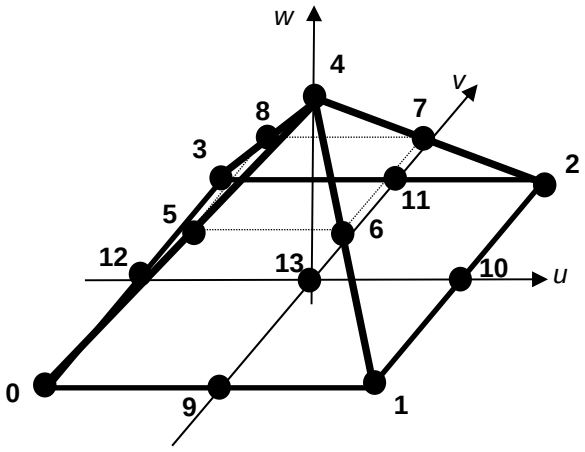
10-NOKTALI DÖRTYÜZLÜ (İKİNCİ DERECEDEN)



$$\begin{cases} N_0(u,v,w) = u\,(2u-1) \\ N_1(u,v,w) = v\,(2v-1) \\ N_2(u,v,w) = w\,(2w-1) \\ N_3(u,v,w) = t\,(2t-1) \\ N_4(u,v,w) = 4\,v\,w \\ N_5(u,v,w) = 4\,u\,w \\ N_6(u,v,w) = 4\,u\,v \\ N_7(u,v,w) = 4\,u\,t \\ N_8(u,v,w) = 4\,v\,t \\ N_9(u,v,w) = 4\,w\,t \end{cases} \qquad (11)$$

$$ile; \quad t = 1-u-v-w$$

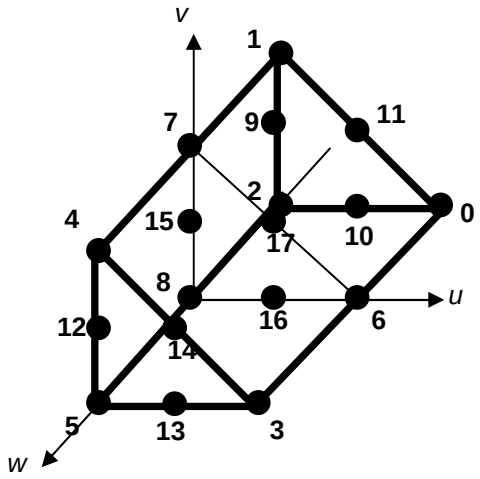
14-NOKTALI PİRAMİT (İKİNCİ DERECEDEN)



$$\begin{cases} N_i^{(9)}\left(\dfrac{u}{1-w},\dfrac{v}{1-w}\right) N_0^{(3)}(2w-1) & i = 0-3 \\ N_1^{(3)}(2w-1) & i = 4 \\ N_{i-5}^{(4)}\left(\dfrac{u}{1-w},\dfrac{v}{1-w}\right) N_2^{(3)}(2w-1) & i = 5-8 \\ N_{i-5}^{(9)}\left(\dfrac{u}{1-w},\dfrac{v}{1-w}\right) N_1^{(3)}(2w-1) & i = 9-13 \end{cases} \qquad (12)$$

3-noktalı kenar biçim fonksiyonları (denklem *(2)*) ile birlikte 9-noktalı ve 4-noktalı dörtgen biçim fonksiyonlarının (denklem *(6)* ve *(4)*) ürünleri.

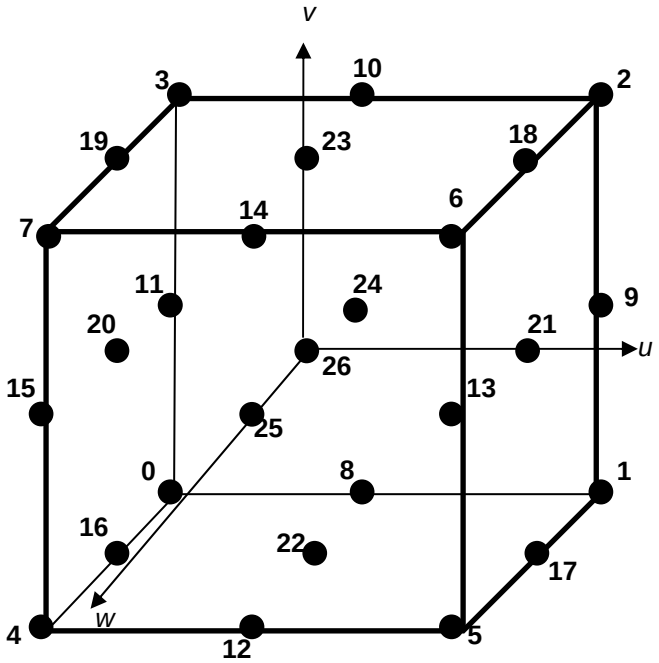
18-NOKTALI KAMA (İKİNCİ DERECEDEN)



$$N_i(u,v,w)=\begin{cases} N_i^{(6)}(u,v)\ w(w-1) & i=0,1,2 \\ N_{i-3}^{(6)}(u,v)\ w(w+1) & i=3,4,5 \\ N_{i-6}^{(6)}(u,v)\ (1-w^2) & i=6,7,8 \\ N_{i-6}^{(6)}(u,v)\ w(w-1) & i=9,10,11 \\ N_{i-9}^{(6)}(u,v)\ w(w+1) & i=12,13,14 \\ N_{i-12}^{(6)}(u,v)\ (1-w^2) & i=15,16,17 \end{cases} \qquad (13)$$

3-noktalı kenar biçim fonksiyonları (denklem *(2)*) ile birlikte 6-noktalı üçgen biçim fonksiyonlarının (denklem *(5)*) ürünleri.

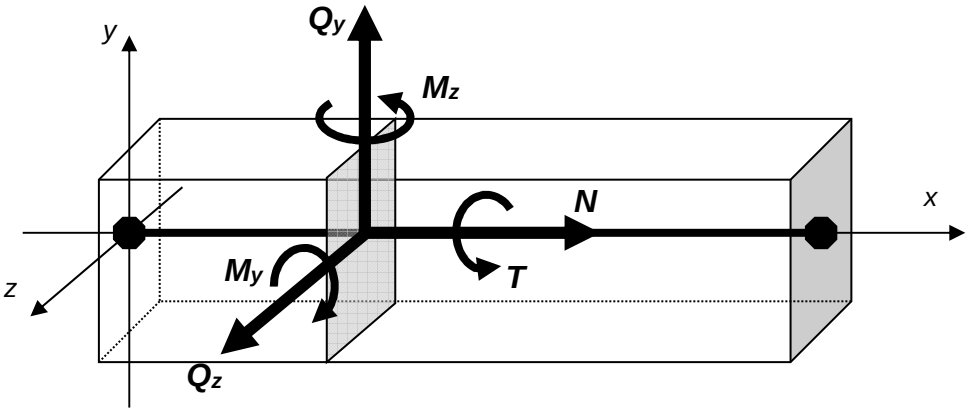
27-NOKTALI ALTIYÜZLÜ (İKİNCİ DERECEDEN)



3-noktalı biçim fonksiyonlarının (denklem *(2)*) ürünleri. *(14)*

II- 1D ELEMANLAR

II-1 KİRİŞ ELEMANLAR



DOĞRUSAL KİRİŞ ELEMANLAR

`model_beam_linear`

Mekanik model

Bu doğrusal kiriş modelinde eksenel, enine-kayma, eğilme ve burulma rijitlikleri bulunmaktadır. Küçük-şekil değiştirme/küçük-yer değiştirme esaslı *Reissner-Timoshenko* kiriş teorisini (doğrusal teori)[7] temel almaktadır. Bu teoride, malzeme kesit yüzeyleri sadece dönme yaparak şekil değiştirme yapmadan düzlem kalmakta ve iki doğrultuda enine-kayma şekil değiştirmesine izin verilmektedir (kesit yüzeyi ile ortalama orta eksen arasındaki açı değişebilmektedir = kalın-kiriş teorisi) *[BAT]*. Bu model, ince-cidarlı kiriş modellerindeki gibi (Vlassov teorisi gibi) kesit yüzeyinin çarpılmasını dikkate almaz. Bünye denklemlerinin doğrusal elastik olması gerekmektedir (Hooke yasası). En az 12 skaler parametresi bulunur:

- Lokal vektör **y**'nin tanımlanması için "üçüncü-nokta" **v** (3 değer).
- Elastisite modülü E.
- Kayma modülü G, ön tanımlı olarak = $E / 2(1+\nu)$.
- Isıl genleşme katsayısı α.
- Eksenel rijitlik için kesit yüzeyi S_x .
- İki etkin kayma kesiti yüzeyi S_y, S_z. Bunlar, bir kesme düzeltme faktörü'nün[8] dikkate alınabilmesi için S_x 'den farklı olabilirler.
- Burulma ataleti I_{xx}.
- Eğilme ataletleri I_{yy} ve I_{zz}[9].

Ek olarak, dönüşüm atalet aksları olan ve tarafsız ekseni sonlu eleman çizgisinden kaydırmak amacıyla y_0 ve z_0 şeklinde tarafsız kaçıklıkları bulunan kirişler için I_{yz} şeklinde bir dönüşüm ataleti tanımlanabilir.
Yasa ayrıca tek tek eleman esaslı bir temel üzerinden de tanımlanabilir. Bu durumda (değişken kesitli kirişler), elemanların her bir ucu için bir geometrik değerler seti (S_x, S_y, S_z, I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}, I_{xy}, y_0, z_0) tarif edilebilir.

x, **y**, **z** akslarının tanımı aşağıdaki şekildedir:
x , tanjant sonlu eleman çizgisi üzerindeki birim vektördür.

---

[7] *Büyük-şekil değiştirme/büyük-yer değiştirme teorisine dayanan geometrik rijitlik matrisi* $\mathbf{K}_0^{\sigma}$ *hariç.*

[8] *Enine-kayma etkisini (ince-kiriş teorisi) ihmal etmek için etkin kayma yüzeyleri, örnek olarak 1000* S_x *gibi büyük bir değere ayarlanabilir. Değeri sıfır yapmak, 2-noktalı kiriş elemanı ile aynı etkiye sahiptir.*

[9] *Ataletler aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:*

$$I_{yy} = \int_S y^2 \, dy \, dz$$

$$I_{zz} = \int_S z^2 \, dy \, dz$$

Burada I_{yy} *, z etrafında dönme için atalet ve* I_{zz} *de* y etrafında dönme için olan ataletlerdir.

z , normalize yapılmış dönüşüm sonucu olan $\mathbf{z} = \dfrac{\mathbf{x} \times \mathbf{v}}{\|\mathbf{x} \times \mathbf{v}\|}$ ile tanımlanır (eğer **x** ve **v** aynı doğru üstündeyse, **z** isteğe göre seçilir).

Bunu takiben $\mathbf{y} = \mathbf{z} \times \mathbf{u}$ ile dönüşüm sonucu elde edilir.

Kinematik, şekil değiştirmeler ve gerilmeler

Bu elemanların her noktada altı serbestlik derecesi bulunmaktadır (global eksen bazlı 3 yer değiştirme ve 3 dönme).
Tüm şekil değiştirme ve gerilme terimlerinin kesit boyunca doğrusal değiştiği varsayılır. Sabit bir bölüm (membran ve kayma terimleri) ve merkezinde boş değer olan iki doğrusal değişken bölüme (eğilme ve burulma terimleri) ayrıştırılırlar.

$$\varepsilon_{xx}(x,y,z) = \varepsilon_{xx}^{N}(x) + y\,\varepsilon_{xx}^{By}(x) + z\,\varepsilon_{xx}^{Bz}(x)$$
$$\varepsilon_{xy}(x,y,z) = \varepsilon_{xy}^{Q}(x) - z\,\varepsilon^{T}(x)$$
$$\varepsilon_{xz}(x,y,z) = \varepsilon_{xz}^{Q}(x) + y\,\varepsilon^{T}(x)$$

ε_{xx}^{N}		*eksenel*
ε_{xx}^{By}	ε_{xx}^{Bz}	*eğilme*
ε_{xy}^{Q}	ε_{xz}^{Q}	*enine kaymalar*
ε^{T}		*burulma*

Kesitlerde düzlem içi gerilmenin sıfır olması kabulü sebebiyle (σ_{yy}, σ_{zz}, σ_{yz}), makaslama enerjisi de sıfır olacaktır ve kesit şekil değiştirmeleri ihmal edilebilir (ε_{yy}, ε_{zz}, ε_{yz} değerleri 0 olur).

Sonuç gerilmeler aslında *bileşke* gerilmelerdir (kesit boyunca entegre edilmiş).
Bileşke gerilmeler[10] şu şekildedir:

$$N = \int_S \sigma_{xx}\,dS$$

$$Q_y = \int_S \sigma_{xy}\,dS \qquad Q_z = \int_S \sigma_{xz}\,dS$$

$$M_y = \int_S y\,\sigma_{xx}\,dS \qquad M_z = \int_S z\,\sigma_{xx}\,dS$$

$$T = \int_S \left(y\,\sigma_{xz} - z\,\sigma_{xy}\right)\,dS$$

Hooke yasası ile bu denklemler şu şekilde yazılır[11]:

[10] *Not edilmelidir ki, bu tanımlarla, y ekseni etrafındaki eğilme momenti* M_z *ve z ekseni etrafındaki de* $-M_y$ 'dir.
[11] *Burada atalet eksenlerinin lokal eksenlerle uyumlu olduğu (atalet dönmesi olmadan) ve tarafsız çizgide herhangi bir kayma olmadığı kabul edilir. Eğer bu şekilde değilse, membran ile eğilme ve kayma ile burulma arasından bir eşleştirme dikkate alınır.*

$$N = E\ S_x\ \varepsilon_{xx}^{N}$$
$$Q_y = G\ S_y\ \varepsilon_{xy}^{Q}$$
$$Q_z = G\ S_z\ \varepsilon_{xz}^{Q}$$
$$M_y = E\ I_{yy}\ \varepsilon_{xx}^{By}$$
$$M_z = E\ I_{zz}\ \varepsilon_{xx}^{Bz}$$
$$T = G\ I_{xx}\ \varepsilon^{T}$$

Bu bileşke gerilmeler aslında iki adet 3-bileşenli vektör şeklinde olan sonuçlardır: kuvvet vektörü **F** (N ve Q) ve moment vektörü **M** (M ve T). Lokal ya da global eksen bazlı olarak tarif edilebilirler. Kural şudur ki; eğrisel bir *x* koordinatı için **F**(x) kuvveti ve **M**(x) momentumu, *s* ≥ *x* olan herhangi bir koordinat için kuvvet ve momentum toplamlarına eşittir.

$$\mathbf{F}(x) = \int_x^L f(s)\,ds \quad + \quad \mathbf{F}(L)$$
$$\mathbf{M}(x) = \int_x^L \big((s-x)\ \mathbf{x}\times f(s)\big)ds + \ (L-x)\ \mathbf{x}\times\mathbf{F}(L) + \ \mathbf{M}(L)$$

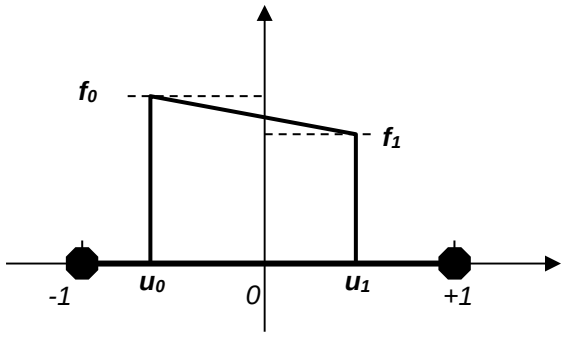
Doğrusal kirişler için özel bir ard-işlemci, gerçek şekil değiştirmeler ile birlikte her elemanın **F**(x) and **M**(x) diyagramlarını doğru şekilde sunmaktadır. Bu işlem kirişin doğrusal düz ve değişken kesitli olmamasını gerektirmektedir.

Geometri

Elemanların geometrisi için herhangi bir özel gereksinim bulunmamaktadır. Kiriş elemanları üç boyutlu tam koordinatlara sahiptir. Sonlu eleman ağları ve elemanlar (3KENARLI) eğrisel olabilir.

Yükler

Mekanik yükler, noktasal (KUVVET ve MOMENTUM), düzgün yayılı (sadece KUVVET) ya da trapezoidal yayılı (sadece KUVVET) olabilir. Trapezoidal yayılı yük, iki parametre yükün tanım alanı için ($-1 \le u_0 < u_1 \le +1$) ve iki katsayı da yük değeri için (yük vektörü üzerindeki f_0 ve f_1 çarpımsal katsayıları) olmak üzere toplam dört terim ile tanımlanmaktadır.



Eşdeğer noktasal yükler dahili olarak çözümlenmekte ve bu sayede nihai sonlu eleman çözümü hatasız olmaktadır. Isı yükleri, her elemanda düzgün yayılı ve her iki kesit doğrultusunda doğrusal olacak şekildedir (iki ısıl eğilme momenti oluşturacak şekilde).

Notlar

• 2KENAR kiriş elemanı, gerçek U ile R değerleriyle ve gerçek bileşke gerilmelerle, doğrusal düzgün kesitli ve doğrusal değişken kesitli kirişler (doğrusal değişen kesitli ve ataletli) için noktasal, düzgün yayılı ve trapezoidal yayılı yüklerle birlikte *hatasızdır*. Rijitlik matrisi herhangi bir sayısal entegrasyon olmadan analitik olarak çözümlenir. Ancak, ataleti ikinci ya da daha yüksek mertebenden polinomlarla ifade edilen kirişler için, sonlu elemanlar çözümü sadece yaklaşık olarak tahmin edilebilir (kesin sonuçtan çok az daha rijit), ve yakınsaması için sonlu eleman ağı sıklaştırılmalıdır.
• 2KENAR modeli eğrisel tanımlar için tam olarak doğru değildir. Sonlu eleman ağı oluşturulmalıdır.
• 3KENAR kiriş eleman ile hesaplanan U ve R tanım alanları sadece iki uçta kesindir – orta noktada kesin değil – ve sadece düzgün yayılı ya da noktasal yük etkisindeki düzgün doğrusal kiriş özel durumu için geçerlidir. Bu eleman, sadece arklar, yayılı yaylar üzerine oturan kirişler ya da kabuk destekleyici kirişler için 2-noktalı kenar elemandan daha uygun olabilir.
• Kayma kaçıklığı yoktur (kayma merkezinin tarafsız eksene göre kaçıklığı).
• Kiriş elemanın kütlesi ya da sönüm değeri yoktur, sadece rijitliği bulunur. Dinamik bir analiz için, rijitlik modeline ek olarak ayrıca bir kiriş kütle ya da bir çizgisel kütle modeli kullanılmalıdır.

	2KENAR	**3KENAR**
Geometri	doğrusal	ikinci dereceden
Biçim fonsiyonları	(1)	(2)
Tip	kesin	izoparametrik
Şekil değ. / gerilmeler	düzgün	ikinci dereceden
Toplam serbestlik. der.	12	18
$\mathbf{K}^L$ Isıl etki gerilmelerine bağlı Yer değiştirmelere/ dönmelere bağlı	Analitik kesin matris *hayır* *hayır*	2 Gauss noktası *hayır* *hayır*
$\mathbf{K}_0^\sigma$ Isıl etki gerilmelerine bağlı Yer değiştirmelere/ dönmelere bağlı	3. dereceden Hermite polinomlarını[12] *temel alan analitik matris* *evet (doğrusal)* *hayır*	*aynı IP* *evet (doğrusal)* *hayır*
$\mathbf{K}^T = \mathbf{K}^L$ Isıl etki gerilmelerine bağlı Yer değiştirmelere/ dönmelere bağlı	*analitik -* *hayır* *hayır*	*aynı IP* *hayır* *hayır*
$\mathbf{F}^{ext}$ Isıl etki gerilmelerine bağlı Yer değiştirmelere/ dönmelere bağlı	• noktasal (analitik) • düzgün (analitik) • trapezoidal (analitik) *hayır* *hayır*	• noktasal (analitik) • düzgün (aynı IP) • trapezoidal (analitik, doğrusal eleman varsayımı) *hayır* *hayır*
$\mathbf{F}_{lin}^{\text{int}} = \mathbf{F}_{nl}^{\text{int}}$ Isıl etki gerilmelerine bağlı Yer değiştirmelere/ dönmelere bağlı	*analitik* *evet (doğrusal)* *evet (doğrusal)* $\mathbf{F}_{lin}^{\text{int}} = -\mathbf{K}^L\ \mathbf{U}$	*aynı IP* *evet (doğrusal)* *evet (doğrusal)* $\mathbf{F}_{lin}^{\text{int}} = -\mathbf{K}^L\ \mathbf{U}$

[12] *Sadece eksenel gerilme etkisi için analitik. Eğilme, kayma ve burulma gerilmeleri etkileri için düzgün integrasyon.*

2KENAR elemanı için lokal matris olan $\mathbf{K}_{lo\ c}^{L}$, ***Oxyz*** (değişken olmayan durumda) lokal eksen bazı içinde aşağıda sıralanmış serbestlik dereceleri ile oluşturulur:

Ux0, Uy0, Uz0, Rx0, Ry0, Rz0, Ux1, Uy1, Uz1, Rx1, Ry1, Rz1

$$
\mathbf{K}_{loc}^{L} = \begin{bmatrix}
\frac{H_m}{L} & & & & & & & & & & & \\
0 & \frac{a_z H_z}{L^3} & & & & & & & & & & \\
0 & 0 & \frac{a_y H_y}{L^3} & & & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & \frac{H_t}{L} & & & & & & & & sim. \\
0 & 0 & \frac{-b_y H_y}{L^2} & 0 & \frac{c_y H_y}{L} & & & & & & & \\
0 & \frac{b_z H_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{c_z H_z}{L} & & & & & & \\
-\frac{H_m}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & & \frac{H_m}{L} & & & & & \\
0 & \frac{-a_z H_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{-b_y H_z}{L^2} & 0 & \frac{a_z H_z}{L^3} & & & & \\
0 & 0 & \frac{-a_y H_y}{L^3} & 0 & \frac{b_y H_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{a_y H_y}{L^3} & & & \\
0 & 0 & 0 & -\frac{H_t}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{H_t}{L} & & \\
0 & 0 & \frac{-b_y H_y}{L^2} & 0 & \frac{d_y H_y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{b_y H_y}{L^2} & 0 & \frac{c_y H_y}{L} & \\
0 & \frac{b_z H_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{d_z H_z}{L} & 0 & \frac{-b_z H_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{c_z H_z}{L}
\end{bmatrix}
$$

ile:

$$
H_m = E\,S_x \quad H_t = G\,I_{xx} \quad H_y = E\,I_{yy} \quad H_z = E\,I_{zz}
$$

$$
a_y = \frac{12}{1+\varphi_y} \quad a_z = \frac{12}{1+\varphi_z} \quad b_y = \frac{6}{1+\varphi_y} \quad b_z = \frac{6}{1+\varphi_z}
$$

$$
c_y = \frac{4+\varphi_y}{1+\varphi_y} \quad c_z = \frac{4+\varphi_z}{1+\varphi_z} \quad d_y = \frac{2-\varphi_y}{1+\varphi_y} \quad d_z = \frac{2-\varphi_z}{1+\varphi_z}
$$

$$
\varphi_y = \begin{cases} \dfrac{12\,E\,I_{yy}}{G\,S_y\,L^2} & if\ S_y > 0 \\ 0 & if\ S_y \le 0 \end{cases} \qquad \varphi_z = \begin{cases} \dfrac{12\,E\,I_{zz}}{G\,S_z\,L^2} & if\ S_z > 0 \\ 0 & if\ S_z \le 0 \end{cases}
$$

Bu matris daha sonra global serbestlik dereceleri koordinatlarına dönüştürülür :

$$
\mathbf{K}^{L} = \mathbf{T}\,\mathbf{K}_{\mathbf{loc}}^{L}\,\mathbf{T}^{T}
$$

Burada T, lokal eksen bazının globala çeviriminden olan dönüşüm matrisidir.

T matrisi, eksenel kuvvet ile eğilme momentumları arasından bir etkileşime yol açan kaçıklıkları da arıca dikkate almaktadır.

DOĞRUSAL OLMAYAN KİRİŞ ELEMANLAR

`model_beam_gNL`

Mekanik model

Doğrusal kiriş modelinde olduğu gibi, doğrusal olmayan modelde eksenel, enine-kayma, eğilme ve burulma rijitlikleri bulunmaktadır. Bu model *Reissner-Timoshenko* kiriş teorisini büyük-şekil değiştirme/büyük-yer değiştirme formunda temel almaktadır (tam doğrusal olmayan teori). Bu form ikinci mertebe şekil değiştirme terimlerini, gerilme pekleşmesini, büyük yerdeğiştirmeleri ve büyük dönmeleri dikkate almaktadır. *Reissner-Timoshenko* teorisinde yapılanlardan daha fazla yaklaşım yapılmamaktadır. Özellikle dönmelerin türevleri tamamen kesindir. Bünye denklemlerinin elastik olması gerekmektedir (*St-Venant*).
Bünye denklemleri, Piola-Kirchhoff-2 gerilme tensörü olan *S* ile Green-Lagrange şekil değiştirme tensörü olan *E* arasında bağlantı kurmaktadır. Denklemler, düzlem-gerilme formunda kullanılmaktadır.

Kinematik, şekil değiştirmeler ve gerilmeler

Doğrusal elemanlar için olan özelliklerle, küçük şekil değiştirme tensörü olan ε 'nin, Green-Lagrange şekil değiştirme tensörü olan *E* ile ve Cauchy gerilme tensörü olan σ 'nın, PK2 gerilme tensörü olan *S* ile değiştirilmesi şartıyla aynıdır.
Güncel yer değiştirme yapmış konfigürasyonda Cauchy tensörü, "doğal" gerilme tensörüdür. Bileşke Cauchy gerilmeleri (N(σ), M(σ), Q(σ), T(σ)), *(2)* ile verilen dönüşüm denklemleri kullanılarak bileşke PK2 gerilmelerinden (N(S), M(S), Q(S), T(S)) elde edilebilirler.

Geometri

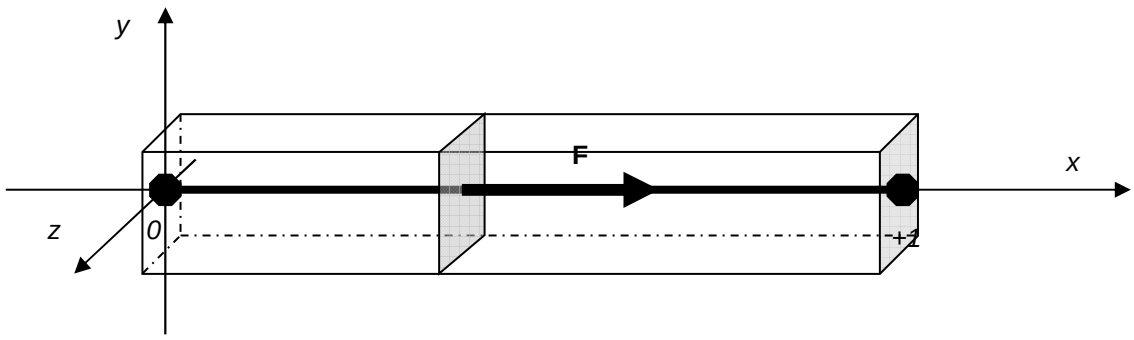
Doğrusal model için olduğu gibidir.

Yükler

Doğrusal model için olduğu gibidir.
Yüklerin *ölü* yük olarak dikkate alındığı not edilmelidir (elemanların pozisyonu ve şekil değiştirmelerinden bağımsız olarak). MOMENTUM yükleri, esas olarak *sonradan gelen* yükler olduğundan doğrusal olmayan analizlerde dikkatle kullanılmalıdır. Yapacakları etkiler genellikle mevcut dönme durumuna bağlıdır.

	2KENAR	**3KENAR**
Geometri	doğrusal	ikinci dereceden
Biçim fonksiyonları	(1)	(2)
Tip	izoparametrik	izoparametrik
Şekil değ. / gerilmeler	düzgün	ikinci dereceden
Toplam serbestlik. der.	12	18
$\mathbf{K}^{L}$ Isıl etki gerilmelerine bağlı Yer değiştirmelere/ dönmelere bağlı	1 Gauss noktası *hayır* *hayır*	2 Gauss noktası *hayır* *hayır*
$\mathbf{K}_{0}^{\sigma}$ Isıl etki gerilmelerine bağlı Güncel noktasal pozisyonlara bağlı	1 Gauss noktası *evet (doğrusal)* *hayır*	2 Gauss noktası *evet (doğrusal)* *hayır*
$\mathbf{K}^{T} \neq \mathbf{K}^{L}$ (tam doğ. olmayan rijitlik) Isıl etki gerilmelerine bağlı Yer değiştirmelere/ dönmelere bağlı	1 Gauss noktası *hayır* *evet*	2 Gauss noktası *hayır* *evet*
$\mathbf{F}^{ext}$ Isıl etki gerilmelerine bağlı Yer değiştirmelere/ dönmelere bağlı	• noktasal (analitik) • düzgün (analitik) • trapezoidal (analitik) *hayır* *hayır*	• noktasal (analitik) • düzgün (aynı IP) • trapezoidal (analitik, doğrusal eleman varsayımı) *hayır* *hayır*
$\mathbf{F}_{nl}^{\mathrm{int}}$ Isıl etki gerilmelerine bağlı Yer değiştirmelere/ dönmelere bağlı	1 Gauss noktası *evet* *evet*	2 Gauss noktası *evet* *evet*

II-2 ÇUBUK ELEMANLAR



DOĞRUSAL ÇUBUK ELEMANLAR

`model_rod_linear`

Mekanik model

Doğrusal çubuk model sadece eksenel rijitliğe sahiptir. Küçük-şekil değiştirme/küçük-yer değiştirme teorisini temel almaktadır (doğrusal teori)[13]. Elemanlarda eğilme, enine-kayma ya da burulma yoktur.
Bünye denklemlerinin elastik olması gerekmektedir ("yay yasası") ancak bir bağ çubuğunu örnek olarak ilerleyen pekleşme yumuşama ile modelleyebilmek amacıyla tek yönlü doğrusal olmayan şekilde olabilir.
Kullanıcı yay yasasında ayrıca bir ısıl genleşme de tanımlayabilmektedir.

Kinematik, şekil değiştirmeler ve gerilmeler

Bu elemanların her noktada üç serbestlik derecesi (DOFs) bulunmaktadır (global eksen bazlı Ux, Uy ve Uz yer değiştirmeleri).
Şekil değiştirme/gerilme teorilerinin (küçük şekil değiştirme teorisi) kesit içerisinde ve her eleman boyunca tamamen eksenel ve düzgün olduğu varsayılır.
Çıktı olarak elde edilen gerilme gerçekte *bileşke* gerilmedir ve her zaman elemanın aksı boyuncadır:

$$F = \int_S \sigma_{xx} dz = S\,\sigma_{xx}$$

Rijitliği, $K = E\,S$ şeklinde tariflenen bir doğrusal yay yasası için kuvvet şu şekilde yazılabilir:

$$F = K\,\frac{u(x=1) - u(x=0)}{L}$$

Geometri

Bu elemanlar düzgün kesite sahiptir (değişkenlik yoktur ancak kesit bir elemandan diğerine farklı olabilir).
İkinci dereceden çubuk eleman (3KENAR) bulunmamaktadır.
Ortalama çizginin kaçıklığına izin verilmemektedir.

Yükler

Mekanik yükler (sadece KUVVET) noktasal, düzgün yayılı ve trapezoidal yayılı olabilir.

---

[13] *Tam doğrusal olmayan teori esaslı geometrik rijitlik matrisi* $\mathbf{K}^0_{geo}$ *hariç.*

Isıl yükler her eleman üzerinde sadece düzgün yayılı olabilir.

Notlar

• Çubuk elemanın kütlesi ve sönüm değeri yoktur.

	2KENAR
Geometri	doğrusal
Biçim fonksiyonları	(1)
Tip	izoparametrik
Şekil değ. / gerilmeler	düzgün
Toplam serbestlik. der.	6
$\mathbf{K}^L$ Isıl etki gerilmelerine bağlı Yer değiştirmelere bağlı	1 Gauss noktası *hayır* *hayır*
$\mathbf{K}_0^\sigma$ Isıl etki gerilmelerine bağlı Yer değiştirmelere bağlı	1 Gauss noktası *evet (doğrusal)* *hayır*
$\mathbf{K}^T = \mathbf{K}^L$ Isıl etki gerilmelerine bağlı Yer değiştirmelere bağlı	1 Gauss noktası *hayır* *hayır*
$\mathbf{F}^{ext}$ Isıl etki gerilmelerine bağlı Yer değiştirmelere bağlı	• noktasal (analitik) • düzgün (analitik) • trapezoidal (analitik) *hayır* *hayır*
$\mathbf{F}_{lin}^{\text{int}} = \mathbf{F}_{nl}^{\text{int}}$ Isıl etki gerilmelerine bağlı Yer değiştirmelere bağlı	*1 Gauss noktası* *evet (doğrusal)* *evet (doğrusal)* $\mathbf{F}_{lin}^{\text{int}} = -\mathbf{K}^L\ \mathbf{U}$

$\mathbf{K}_{loc}^L$ matrisi, aşağıdaki şekilde sıralanmış serbestlik dereceleriyle basitçe yazılabilir:

Ux0, Uy0, Uz0, Ux1, Uy1, Uz1

$$\mathbf{K}_{loc}^{L} = \begin{bmatrix} \frac{K}{L} & & & & & \\ 0 & 0 & & & sim. & \\ 0 & 0 & 0 & & & \\ -\frac{K}{L} & 0 & 0 & \frac{K}{L} & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

DOĞRUSAL OLMAYAN ÇUBUK ELEMANLAR

`model_rod_gNL`

Mekanik model

Bir önceki modelde olduğu gibi, doğrusal olmayan çubuk modeli de sadece eksenel rijitliğe sahiptir. Küçük-şekil değiştirme/büyük-yer değiştirme teorisini temel almaktadır. Eksenel kuvvet daima *güncel* yerdeğiştirmiş eleman çizgisi üzerindedir. Bu durum, küçük şekil değiştirme yapmış ancak büyük yer değiştirmeler yapmaya müsait kablo elemanların modellenmesine de olanak vermektedir.
Bünye denklemlerinin elastik olması gerekmektedir ("yay yasası") ancak bir kabloyu, örnek olarak ilerleyen pekleşme yumuşama ile modelleyebilmek amacıyla tek yönlü doğrusal olmayan şekilde olabilir.
Kullanıcı yay yasasında ayrıca bir ısıl genleşme de tanımlayabilmektedir. Bu ısıl genleşme, örnek olarak kablonun başlangıç gevşek durumunu dikkate almak amacıyla kullanılabilir (gerçek kablonun iki nokta arasındaki mesafeden daha uzun olduğu zaman).

Kinematik, şekil değiştirmeler ve gerilmeler

Doğrusal model için olduğu gibidir ancak şekil değiştirmeler ve yer değiştirmeler güncel yer değiştirmiş ortalama çizgi doğrultusuna yönelmiştir.

Geometri

Doğrusal model için olduğu gibidir.

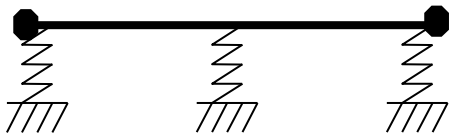
Yükler

Doğrusal model için olduğu gibidir.
Yüklerin *ölü* yük olarak dikkate alındığı not edilmelidir (elemanların pozisyonundan bağımsız olarak).
Başlangıç konfigürasyonunda tanımlanırlar ve yaptıkları iş elemanın yer değiştirmesiyle birlikte değişmez.

	2KENAR
Geometri	doğrusal
Biçim fonksiyonları	(1)
Tip	izoparametrik
Şekil değ. / gerilmeler	düzgün (eksenel)
Toplam serbestlik. der.	6
$\mathbf{K}^L$ Isıl etki gerilmelerine bağlı Yer değiştirmelere bağlı	1 Gauss noktası *hayır* *hayır*
$\mathbf{K}_0^\sigma$ Isıl etki gerilmelerine bağlı Yer değiştirmelere bağlı	1 Gauss noktası *evet (doğrusal)* *hayır*
$\mathbf{K}^T \neq \mathbf{K}^L$ (tam doğ. olmayan rijitlik) Isıl etki gerilmelerine bağlı Yer değiştirmelere bağlı	1 Gauss noktası *hayır* *evet*
$\mathbf{F}^{ext}$ Isıl etki gerilmelerine bağlı Yer değiştirmelere bağlı	• noktasal (analitik) • düzgün (analitik) • trapezoidal (analitik) *hayır* *hayır*
$\mathbf{F}_{nl}^{\text{int}}$ Isıl etki gerilmelerine bağlı Yer değiştirmelere bağlı	1 Gauss noktası *evet* *evet*

$\mathbf{K}^L$ matrisi, aynı doğrusal durumda olduğu şekilde: $K = K(u = 0)$ rijitlik değeriyle birlikte yazılabilir.

II-3 1D YAYILI YAY ELEMANLAR



YAYILI DOĞRUSAL YAY ELEMANLAR

model_distributed_spring_1D

Mekanik model

Bu elemanlar bir doğru üzerinde yayılmış yayları modeller. Yayları bir "yay kanunu" ve bir doğrultu (elemanlara normal doğrultuda olması gerekmez) tanımlamaktadır. Yay kanunu doğrusal ya da bir zemini, ilerleyen pekleşme/yumuşama ile tek yönlü doğrusal olmayan şekilde modelleyebilmek amacıyla doğrusal olmayan formda olabilir.
Bir modeldeki tüm elemanlar için doğrultu düzgündür.

Kinematik, şekil değiştirmeler ve gerilmeler

Bu elemanların her noktada üç serbestlik derecesine bulunmaktadır (global eksen bazlı üç yer değiştirme). Şekil değiştirme/yer değiştirme tensörleri her tümleştirme noktasında tanımlanır. Bunların hepsi yay doğrultusundaki tek bir değere indirgenir.
Şekil değiştirme, yay doğrultusundaki yer değiştirmedir. Gerilme ise yayılı yayın birim uzunluğunun reaksiyonudur.

Geometri

Elemanların geometrisi açısından herhangi özel bir şart bulunmamaktadır. Sonlu elemanlar ağı eğrisel olabilir. İkinci dereceden E3 elemanlar ayrıca eğrisel olabilir.

Yükler

Yayılı yay modelleri üzerine sadece KUVVET yüklerinin tanımlanmasına izin verilmektedir. Yükler sonlu elemanların serbestlik derecelerine etkimektedir. Yükler noktasal, düzgün yayılı ve trapezoidal yayılı olabilir.

Notlar

• Yaylar üzerinde bir ısıl genleşme tanımlanmasına izin verilmektedir. Yay kanunu ile birlikte ısıl genleşme katsayısının tanımlanması gerekmektedir.
• Sonlu elemanlar kütüphanesi içerisinde geometrik doğrusal olmayan yayılı yay modeli (elemanarın uzunluğunda büyük oranlardaki değişimleri dikkate alan) bulunmamaktadır.
• Yayılı yay elemanın kütlesi ve sönüm değeri yoktur.

	2KENAR	3KENAR
Geometri	doğrusal	ikinci dereceden
Biçim fonksiyonları	(1)	(2)
Tip	izoparametrik	izoparametrik
Şekil değ. / gerilmeler	doğrusal	ikinci dereceden
Toplam serbestlik. der.	6	9
$\mathbf{K}^L$ Isıl etki gerilmelerine bağlı Yer değiştirmelere bağlı	2 Gauss noktası *hayır* *hayır*	3 Gauss noktası *hayır* *hayır*
$\mathbf{K}_0^\sigma$ Isıl etki gerilmelerine bağlı Yer değiştirmelere bağlı	*boş* *hayır* *hayır*	*boş* *hayır* *hayır*
$\mathbf{K}^T = \mathbf{K}^L$ Isıl etki gerilmelerine bağlı Yer değiştirmelere bağlı	2 Gauss noktası *hayır* *hayır*	3 Gauss noktası *hayır* *hayır*
$\mathbf{F}^{ext}$ Isıl etki gerilmelerine bağlı Yer değiştirmelere bağlı	• noktasal (analitik) • düzgün (analitik) • trapezoidal (analitik) *hayır* *hayır*	• noktasal (analitik) • düzgün (aynı IPs) • trapezoidal (analitik) *hayır* *hayır*
$\mathbf{F}_{lin}^{\text{int}} = \mathbf{F}_{nl}^{\text{int}}$ Isıl etki gerilmelerine bağlı Yer değiştirmelere bağlı	2 Gauss noktası *evet (doğrusal)* *evet (doğrusal)* $\mathbf{F}_{lin}^{\text{int}} = -\mathbf{K}^L\ \mathbf{U}$	3 Gauss noktası *evet (doğrusal)* *evet (doğrusal)* $\mathbf{F}_{lin}^{\text{int}} = -\mathbf{K}^L\ \mathbf{U}$

II-4 ÇİZGİSEL KÜTLE ELEMANLAR

`model_line_mass`

Mekanik model

Doğrusal kütle elemanlar sadece yer değiştirme serbestlik derecelerine uygulanmaktadır (dönme serbestlik derecelerine uygulanmaz). Bir kirişe ya da çizgisel bir ağa (örneğin 2D bir modelin sınır hattı) doğrusal kütle tanımlamak için kullanılmaktadır. Kütle modelini bir "skaler yasası" tanımlamaktadır. Skaler değer ise çizgisel kütle yoğunluğudur (kirişler için elemanın kesiti dikkate alınmaktadır).

Geometri

Elemanların geometrisi açısından herhangi özel bir şart bulunmamaktadır. Sonlu eleman ağları ve elemanlar eğrisel olabilir (3KENAR).

Yükler

Kütle modelleri üzerine yük tanımlanmasına izin verilmemektedir.

Notlar

• Kütle matrisi sabittir ve güncel konfigürasyona bağlı değildir.
• Doğrusal kütlenin rijitliği ve sönüm değeri yoktur.

	2KENAR	**3KENAR**
Geometri	doğrusal	ikinci dereceden
Biçim fonksiyonları	(1)	(2)
Tip Toplam serbestlik der.	izoparametrik 6	izoparametrik 9
$\mathbf{M}$ Isıl etki gerilmelerine bağlı Yer değiştirmelere bağlı	2 Gauss noktası *hayır* *hayır*	3 Gauss noktası *hayır* *hayır*
$\mathbf{F}^{inertia}$ Isıl etki gerilmelerine bağlı Yer değiştirmelere bağlı	2 Gauss noktası *hayır* *evet (doğrusal)* $\mathbf{F}^{inertia} = -\mathbf{M}\,\mathbf{V}$	3 Gauss noktası *hayır* *evet (doğrusal)* $\mathbf{F}^{inertia} = -\mathbf{M}\,\mathbf{V}$

2KENAR elemanı için M_{loc} matrisi, aşağıdaki şekilde sıralanmış olan serbestlik dereceleriyle yazılabilir:

Ux0, Uy0, Uz0, Ux1, Uy1, Uz1

$$\mathbf{M}_{loc} = L \begin{bmatrix} \frac{m}{3} & & & & & \\ 0 & \frac{m}{3} & & & sim. & \\ 0 & 0 & \frac{m}{3} & & & \\ \frac{m}{6} & 0 & 0 & \frac{m}{3} & & \\ 0 & \frac{m}{6} & 0 & 0 & \frac{m}{3} & \\ 0 & 0 & \frac{m}{6} & 0 & 0 & \frac{m}{3} \end{bmatrix}$$

II-5 KİRİŞ KÜTLE ELEMANLARI

`model_beam_mass`

Mekanik model

Kiriş kütle elemanları, yer değiştirme ve dönme serbestlik derecelerinin her ikisine de uygulanmaktadır. Bu kütle modeli, 3. dereceden Hermite polinomlarını esas aldığı için basit "çizgisel kütle" modelinden daha kesindir. Buna ek olarak dönme ataleti dikkate alınabilmektedir. Modal titreşim frekansları, daha büyük bir kütle matrisi ve daha uzun hesaplama süreleri gerektirmesine karşı bu dönme ataletleriyle birlikte bir miktar aşağı çekilebilmektedir.
"Kiriş kütle kanunu" kiriş kütle modelini tanımlar. En az 8 skaler parametresi bulunmaktadır:

- Lokal kaynağı tanımlamak için "üçüncü nokta" (3 değer).
- Bir hacimsel kütle yoğunluğu (eleman kesitini dikkate almayan).
- Kesit yüzeyi.
- Lokal akslarda üç atalet: I_{xx} (burulma ataleti), I_{yy} (Z ekseni etrafında), I_{zz} (Y ekseni etrafında).

Dönük atalet eksenleri olan kirişler için I_{xy} çapraz ataleti ve sonlu eleman çizgisinden kaçık kirişler için de iki kaçık tarafsız eksen eklenmesi mümkündür.

Geometri

Elemanların geometrisi açısından herhangi özel bir şart bulunmamaktadır. Sonlu elemanlar ağı eğrisel olabilir. İkinci dereceden T6 ve Q9 elemanlar ayrıca eğrisel olabilir.

Yükler

Kütle modelleri üzerinde yüke izin verilmemektedir.

Notlar

- Tekrar hatırlatmak gerekirse, kütle modeli rijitlik modelinden bağımsızdır ve bundan dolayı parametreler rijitlik kanununda kullanılanlardan farklı olabilir.
- Kütle matrisi sabittir ve güncel konfigürasyona bağlı değildir.
- 2KENAR modelleri için kütle matrisi analitik olarak hesaplanmaktadır (sayısal integrasyon yapılmadan).
- Burulma titreşim modlarının elde edilebilmesi için bu kütle modeli gereklidir.
- Kiriş kütle elemanının rijitliği ve sönüm değeri yoktur.

	2KENAR	**3KENAR**
Geometri	doğrusal	ikinci dereceden
Biçim fonksiyonları	(1)	(2)
Tip Toplam serbestlik der.	süper-parametrik 12	izoparametrik 18
$\mathbf{M}$	3. dereceden Hermite polinomları esaslı analitik matris	3 Gauss noktası
Isıl etki gerilmelerine bağlı	*hayır*	*hayır*
Yer değiştirmelere/ dönmelere bağlı	*hayır*	*hayır*
$\mathbf{F}^{inertia}$	*analitik*	3 Gauss noktası
Isıl etki gerilmelerine bağlı	*hayır*	*hayır*
Yer değiştirmelere/ dönmelere bağlı	*evet (doğrusal)* $\mathbf{F}^{inertia} = -\mathbf{M}\,\mathbf{V}$	*evet (doğrusal)* $\mathbf{F}^{inertia} = -\mathbf{M}\,\mathbf{V}$

2KENAR elemanı için M_{loc} matrisi (değişken kesitli olmayan durumda), aşağıdaki şekilde sıralanmış serbestlik dereceleriyle yazılabilir:

Ux0, Uy0, Uz0, Rx0, Ry0, Rz0, Ux1, Uy1, Uz1, Rx1, Ry1, Rz1

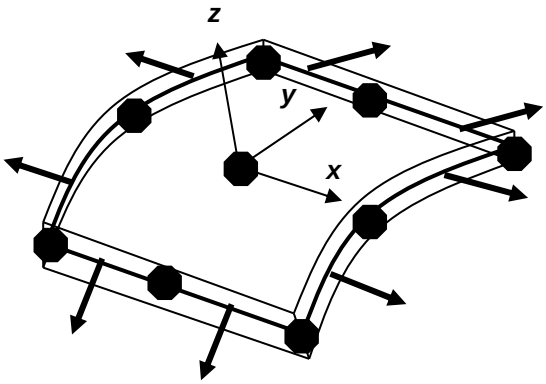
$$\mathbf{M}_{loc} = L \begin{bmatrix}
\frac{m}{3} & & & & & & & & & & & \\
0 & \frac{13m}{35} & & & & & & & & & & \\
0 & 0 & \frac{13m}{35} & & & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & \frac{j_x}{3} & & & & & sim. & & & \\
0 & 0 & -\frac{11mL}{210} & 0 & \frac{mL^2}{105}+\frac{j_z}{3} & & & & & & & \\
0 & \frac{11mL}{210} & 0 & 0 & 0 & \frac{mL^2}{105}+\frac{j_y}{3} & & & & & & \\
\frac{m}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{m}{3} & & & & & \\
0 & \frac{9m}{70} & 0 & 0 & 0 & \frac{13mL}{420} & 0 & \frac{13m}{35} & & & & \\
0 & 0 & \frac{9m}{70} & 0 & -\frac{13mL}{420} & 0 & 0 & 0 & \frac{13m}{35} & & & \\
0 & 0 & 0 & \frac{j_x}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{j_x}{3} & & \\
0 & 0 & \frac{13mL}{420} & 0 & -\frac{mL^2}{140}+\frac{j_z}{6} & 0 & 0 & 0 & \frac{11mL}{210} & 0 & \frac{mL^2}{105}+\frac{j_z}{3} & \\
0 & -\frac{13mL}{420} & 0 & 0 & 0 & -\frac{mL^2}{140}+\frac{j_y}{6} & 0 & -\frac{11mL}{210} & 0 & 0 & 0 & \frac{mL^2}{105}+\frac{j_y}{3}
\end{bmatrix}$$

ile birlikte:

$$m = \rho S_x$$
$$j_x = \rho I_{xx}$$
$$j_y = \rho I_{yy}$$
$$j_z = \rho I_{zz}$$

III- 2D ELEMANLAR

III-1 MEMBRAN ELEMANLAR



DOĞRUSAL MEMBRAN ELEMANLAR

`model_membrane_lin`

Mekanik model

Bu model sadece membran rijitliğine sahiptir (düzlem içerisinde) ancak eğilme ve enine kayma rijitliği yoktur (düzlem dışı). İlave rijitleştirici elemanlar (kiriş veya kabuk elemanlar) ile veya normal şekil değiştirmesine ait serbestlik derecesi sınırlandırılmış olan düzlemler içerisinde kullanılması gerekmektedir. Bu elemanlar küçük şekil değiştirme/küçük yer değiştirme toerisini temel almaktadır (doğrusal teori)[14]. Bünye denklemlerinin elastik olması gerekmektedir (izotropik Hooke kanunu ya da tanjant planı içerinde ortotropik). Bünye denklemleri düzlemsel gerilme formunda kullanılmaktadır.

Kinematik, şekil değiştirmeler ve gerilmeler

Membran elemanların her noktasında üç serbestlik derecesi (DOFs) bulunmaktadır (global eksen bazlı yerdeğiştirmeler Ux, Uy, Uz).
Şekil değiştirme/gerilme tensörleri (küçük şekil değiştirme teorisi) elemanın tanjant düzlemi içerisinde tanımlıdır (her tümleştirme noktasında) ve kalınlık boyunca doğrusaldır:)

ε_{xx}, ε_{xy}, ε_{yy}
σ_{xx}, σ_{xy}, σ_{yy}

Diğer terimler sıfır olarak dikkate alınırlar. ($\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zz} = 0$, $\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0$).
Sonuç gerilmeler aslında *bileşke* gerilmelerdir (kalınlık boyunca entegre edilmiş):

$$F_{xx} = \int_{thick} \sigma_{xx} dz = h\sigma_{xx}$$

$$F_{yy} = \int_{thick} \sigma_{yy} dz = h\sigma_{yy}$$

$$F_{xy} = \int_{thick} \sigma_{xy} dz = h\sigma_{xy}$$

[14] *Büyük-şekil değiştirme/büyük-yer değiştirme teorisine dayanan geometrik rijitlik matrisi,* $\mathbf{K}_0^{\sigma}$ *hariç.*

Geometri

Bu elemanların kalınlıkları düzgün yayılıdır (incelen kesit yoktur ancak kalınlık bir elemandan diğerine geçerken değişebilir). Elemanların aynı düzlemde olmasına gerek yoktur (eğrisel sonlu elemanlar ağı kullanılabilir ayrıca T6 ve Q9 gibi ikinci dereceden elemanlar da eğrisel olabilirler).
Yüzeyin ortasında kaçıklığa izin verilmemektedir.

Yükler

Mekanik yükler (sadece KUVVET) noktasal, düzgün yayılı ya da trapezoidal yayılı olabilir.
Isıl yükler her elemanda sadece düzgün yayılı olabilir.

Notlar

• Membran elemanın kütlesi ve sönüm değeri yoktur.

	T3YÜZLÜ	**Q4YÜZLÜ**	**T6YÜZLÜ**	**Q9YÜZLÜ**
Geometri	doğrusal	doğrusal	ikinci dereceden	ikinci dereceden
Biçim fonksiyonları	(3)	(4)	(5)	(6)
Tip	izoparametrik	izoparametrik	izoparametrik	izoparametrik
Şekil değ./gerilme	düzgün	çift doğrusal	çift doğrusal	dördüncü dereceden
Toplam ser. der.	9	12	18	27
$\mathbf{K}^L$ Isıl etki gerilmelerine bağlı Yer değiştirmelere bağlı	1 Hammer noktası *hayır* *hayır*	2 x 2 Gauss noktası *hayır* *hayır*	6 Hammer noktası	3 x 3 Gauss noktası *hayır* *hayır*
$\mathbf{K}_0^\sigma$ Isıl etki gerilmelerine bağlı Yer değiştirmelere bağlı	1 Hammer noktası *evet (doğrusal)* *hayır*	2 x 2 Gauss noktası *evet (doğrusal)* *hayır*	6 Hammer noktası	3 x 3 Gauss noktası *evet (doğrusal)* *hayır*
$\mathbf{K}^T = \mathbf{K}^L$ Isıl etki gerilmelerine bağlı Yer değiştirmelere bağlı	1 Hammer noktası *hayır* *hayır*	2 x 2 Gauss noktası *hayır* *hayır*	6 Hammer noktası	3 x 3 Gauss noktası hayır *hayır*
$\mathbf{F}^{ext}$ Isıl etki gerilmelerine bağlı Yer değiştirmelere bağlı	• noktasal (analitik) • düzgün (3 Hammer noktası) • trapezoidal (3 Hammer noktası) *hayır* *hayır*	• noktasal (analitik) • düzgün (2 x 2 Gauss noktası) • trapezoidal (2 x 2 Gauss noktası) *hayır* *hayır*	• noktasal (analitik) • düzgün (6 Hammer noktası) • trapezoidal (6 Hammer noktası)	• noktasal (analitik) • düzgün (3 x 3 Gauss noktası) • trapezoidal (3 x 3 Gauss noktası) *hayır* *hayır*
$\mathbf{F}_{lin}^{\text{int}} = \mathbf{F}_{nl}^{\text{int}}$ Isıl etki gerilmelerine bağlı Yer değiştirmelere bağlı	1 Hammer noktası *evet (doğrusal)* *evet (doğrusal)* $\mathbf{F}_{lin}^{\text{int}} = -\mathbf{K}^L\ \mathbf{U}$	2 x 2 Gauss noktası *evet (doğrusal)* *evet (doğrusal)* $\mathbf{F}_{lin}^{\text{int}} = -\mathbf{K}^L\ \mathbf{U}$	6 Hammer noktası	3 x 3 Gauss noktası *evet (doğrusal)* *evet (doğrusal)* $\mathbf{F}_{lin}^{\text{int}} = -\mathbf{K}^L\ \mathbf{U}$

DOĞRUSAL OLMAYAN MEMBRAN ELEMANLAR

`model_membrane_gNL`

Mekanik model

Bu elemanlar sadece membran rijitliğine sahiptir (düzlem içerisinde) ancak eğilme ve enine kayma rijitliği yoktur (düzlem dışı). Düzlem dışı rijitliklerinin sıfır olması nedeni ile bu elemanlar tek başlarına kullanılamazlar, ilave rijitleştirici elemanlar (kiriş veya kabuk elemanlar) ile veya normal şekil değiştirmesine ait serbestlik derecesi sınırlandırılmış olan düzlemler içerisinde kullanılması gerekmektedir. Bu elemanlar büyük şekil değiştirme/büyük yer değiştirme toerisini temel almaktadır (*tam doğrusal olmayan teori*). Bu teori 2. mertebe şekil değiştirme durumlarına ve gerilme rijitliklerini hesaplara katmaktadır.
Bünye denklemlerinin elastik olması gerekmektedir (izotropik St-Venant tipi ya da başlangıç tanjant planı içerinde ortotropik). Bünye denklemleri düzlemsel gerilme formunda kullanılmaktadır.

Kinematik, şekil değiştirmeler ve gerilmeler

Doğrusal elemanlar ile aynıdır ancak küçük şekil değiştirme tensörü ε yerine Green-Lagrange şekil değiştirme tensörü E ve Cauchy gerilme tensörü σ yerine PK2 gerilme tensörü S kullanılmaktadır.
Güncel yer değiştirme yapmış konfigürasyonda Cauchy tensörü, "doğal" gerilme tensörüdür. Bileşke Cauchy gerilmesi (F(σ)), *(2)* ile verilen dönüşüm denklemleri kullanılarak bileşke PK2 gerilmesinden (F(S)) elde edilebilirler.

Geometri

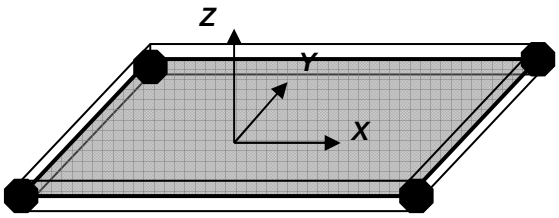
Doğrusal model için olduğu gibidir.

Yükler

Doğrusal model için olduğu gibidir.
Yüklerin *ölü* yük olarak dikkate alındığı not edilmelidir (elemanların pozisyonu ve şekil değiştirmelerinden bağımsız olarak).

	T3YÜZLÜ	**Q4YÜZLÜ**	**T6YÜZLÜ**	**Q9YÜZLÜ**
Geometri	doğrusal	çift doğrusal	ikinci dereceden	dördüncü dereceden
Biçim fonksiyonları	(3)	(4)	(5)	(6)
Tip	izoparametrik	izoparametrik	izoparametrik	izoparametrik
Şekil değ./gerilme	düzgün	çift doğrusal	çift doğrusal	dördüncü dereceden
Toplam ser. der.	9	12	18	27
$\mathbf{K}^L$ (doğ. modellerle aynı)	1 Hammer noktası	2 x 2 Gauss noktası	6 Hammer noktası	3 x 3 Gauss noktası
Isıl etki gerilmelerine bağlı	*hayır*	*hayır*	*hayır*	*hayır*
Yer değiştirmelere bağlı	*hayır*	*hayır*	*hayır*	*hayır*
$\mathbf{K}^\sigma$ (doğ. modellerle aynı)	*aynı IPs*	*aynı IPs*	*aynı IPs*	*aynı IPs*
Isıl etki gerilmelerine bağlı	*evet*	*evet*	*evet*	*evet*
Yer değiştirmelere bağlı	*hayır*	*hayır*	*hayır*	*hayır*
$\mathbf{K}^T \neq \mathbf{K}^L$ (tam doğ. olm. rijitlik)	*aynı IPs*	*aynı IPs*	*aynı IPs*	*aynı IPs*
Isıl etki gerilmelerine bağlı	*evet*	*evet*	*evet*	*evet*
Yer değiştirmelere bağlı	*evet*	*evet*	*evet*	*evet*
$\mathbf{F}^{ext}$	• noktasal (analitik) • düzgün (3 Hammer noktası) • trapezoidal (3 Hammer noktası)	• noktasal (explicit) • düzgün (2 x 2 Gauss noktası) • trapezoidal (2 x 2 Gauss noktası)	• noktasal (explicit) • düzgün (6 Hammer noktası) • trapezoidal (6 Hammer noktası)	• noktasal (explicit) • düzgün (3 x 3 Gauss noktası) • trapezoidal (3 x 3 Gauss noktası)
Isıl etki gerilmelerine bağlı	*hayır*	*hayır*	*hayır*	*hayır*
Yer değiştirmelere bağlı	*hayır*	*hayır*	*hayır*	*hayır*
$\mathbf{F}_{lin}^{\text{int}}$	*aynı IPs*	*aynı IPs*	*aynı IPs*	*aynı IPs*
Isıl etki gerilmelerine bağlı	*evet*	*evet*	*evet*	*evet*
Yer değiştirmelere bağlı	*evet (doğrusal)* $\mathbf{F}_{lin}^{\text{int}} = -\mathbf{K}^L\ \mathbf{U}$	*evet (doğrusal)* $\mathbf{F}_{lin}^{\text{int}} = -\mathbf{K}^L\ \mathbf{U}$	*evet (doğrusal)* $\mathbf{F}_{lin}^{\text{int}} = -\mathbf{K}^L\ \mathbf{U}$	*evet (doğrusal)* $\mathbf{F}_{lin}^{\text{int}} = -\mathbf{K}^L\ \mathbf{U}$
$\mathbf{F}_{nl}^{\text{int}}$	*aynı IPs*	*aynı IPs*	*aynı IPs*	*aynı IPs*
Isıl etki gerilmelerine bağlı	*evet*	*evet*	*evet*	*evet*
Yer değiştirmelere bağlı	*evet*	*evet*	*evet*	*evet*

III-2 PLAK ELEMANLAR



DOĞRUSAL PLAK ELEMANLAR

`model_plate_lin`

Mekanik model

Bu elemanlarda eğilme ve enine-kayma rijitliği (düzlem dışı) bulunmakta, ancak membran rijitliği (düzlem içi) bulunmamaktadır. Küçük-şekil değiştirme/küçük-yer değiştirme esaslı *Reissner-Mindlin* plak teorisini (doğrusal teori)[15] temel almaktadır. Bu teoride, kalınlık boyunca malzeme çizgileri sadece dönme yaparak şekil değiştirme yapmadan düz kalmakta ve enine kayma-şekil değiştirmesine izin verilmektedir (yüzeye dik malzeme çizgileri ile ortalama orta-yüzey arasındaki açı değişebilmektedir). Düzlem global eksen bazlı 3 doğal düzlemden birisi üzerinde yer almalıdır: Z = sabit (ön tanımlı), X = sabit ya da Y = sabit.
Bünye denklemlerinin elastik olması gerekmektedir (izotropik ya da düzlem içinde ortotropik). Düzleme dik makaslama gerilmesinin (σ_{zz}) sıfır kabul edilmesi sebebiyle denklemler *düzlem-gerilmesi* formunda kullanılır.

Kinematik, şekil değiştirmeler ve gerilmeler

Bu elemanların her noktasında üç serbestlik derecesi bulunmaktadır (düzleme dik yönde 1 yerdeğişdirme ve düzlem içerisinde 2 dönme).

Düzlem	Serbestlik dereceleri
Z = sabit	Uz, Rx, Ry
X = sabit	Ux, Ry, Rz
Y = sabit	Uy, Rx, Rz

Şekil değiştirme/gerilme tensörleri elemanların düzlemleri içerisinde tanımlanmıştır (her bir tümleştirme noktasında). Enine kayma terimleri düzgün yayılı kabul edilirken, düzlem içi terimler kalınlık boyunca doğrusal olarak değişiklik göstermektedir.

$$\varepsilon_{xx}(x,y,z) = z\,\varepsilon_{xx}^{B}(x,y)$$
$$\varepsilon_{yy}(x,y,z) = z\,\varepsilon_{yy}^{B}(x,y)$$
$$\varepsilon_{xy}(x,y,z) = z\,\varepsilon_{xy}^{B}(x,y)$$
$$\varepsilon_{xz}(x,y,z) = \varepsilon_{xz}^{Q}(x,y)$$
$$\varepsilon_{yz}(x,y,z) = \varepsilon_{yz}^{Q}(x,y)$$

ε_{xx}^{B} ε_{yy}^{B} ε_{xy}^{B} *eğilme*

ε_{xz}^{Q} ε_{yz}^{Q} *enine kayma*

Normal gerilmelerin sıfır olması kabulü sebebiyle (σ_{zz} = 0), makaslama enerjisi de sıfır kabul edilir ve düzleme dik şekil değiştirme ihmal edilebilir (ε_{zz} değeri 0 olur).
Sonuç gerilmeler aslında *bileşke* gerilmelerdir (kalınlık boyunca entegre edilmiş).

---

[15] *Büyük-şekil değiştirme/büyük-yer değiştirme teorisine dayanan geometrik rijitlik matrisi* $\mathbf{K}_0^{\sigma}$ *hariç.*

Bileşke gerilmeler şu şekildedir[16]:

$$M_{xx} = \int_{thick} z\,\sigma_{xx}\,dz \quad M_{yy} = \int_{thick} z\,\sigma_{yy}\,dz \quad M_{xy} = \int_{thick} z\,\sigma_{xy}\,dz$$

$$Q_x = \int_{thick} \sigma_{xz}\,dz \qquad Q_y = \int_{thick} \sigma_{yz}\,dz$$

Geometri

Bu elemanların düzgün yayılı kalınlığı bulunmaktadır (değişkenlik yoktur ancak elemanlar arasında kalınlık değeri farklı olabilir). Plak model içerisindeki bütün elemanlar model tanımı içindeki düzlemin içerisinde yer almalıdır. İkinci dereceden T6 ve Q9 elemanları eğrisel olamaz (ancak sınırları olabilir).

Yükler

Mekanik yükler (KUVVET ve MOMENTUM), noktasal , düzgün yayılı, trapezoidal ya da basınç yükü olabilir. Plak modelde yükün yalnızca düzleme dik bileşeni (KUVVET yükü için) etkilidir. Düzlem-içi bileşenler herhangi bir etki yaratmamaktadır. Bir MOMENTUM yükü için bu durumun tam tersi olmaktadır.
Isıl yükler her bir eleman üzerinde kalınlık boyunca sıcaklığın doğrusal değiştiği şekilde sadece düzgün yayılı halde olabilir (bir miktar ısıl eğilme şekil değiştirmeleri oluşturarak).

Notlar

• Q4YÜZLÜ plak elemanı, kilitlenme durumuna karşı özel bir enine-kayma entegrasyonuna sahiptir. Kullanılan formül genellikle Q4ANS ya da Q4γ [BAT] olarak anılmaktadır.
Q9YÜZLÜ plak elemanı da kilitlenme durumuna karşı özel bir enine-kayma integrasyonuna sahiptir [HUA].
• Düşük dereceli elemanlar için (T3 and Q4), basit-mesnetli veya kenetlenmiş sınırlar yakınında enine-kayma gerilmesi düzensiz görünebilir. Bu durum reaksiyonların da düzensiz olmasına sebep olur. Bu sınırlar yakınında daha sık bir sonlu elemanlar ağı ya da daha yüksek dereceli elemanların (T6 and Q9) kullanımı çözümü iyileştirebilir.
• Plak elemanın kütlesi ve sönüm değeri yoktur.

[16] M *olarak belirtilen eğilme momentumu terimlerinin gerçek moment olmadığı not alınmalıdır.* M *bir tensördür.*

	T3YÜZLÜ	**Q4YÜZLÜ**	**T6YÜZLÜ**	**Q9YÜZLÜ**
Geometri	düz	düz	düz (eğrisel sınırlar)	düz (eğrisel sınırlar)
Biçim fonksiyonları	(3)	(4)	(5)	(6)
Tip	izoparametrik	izoparametrik	izoparametrik	izoparametrik
Şekil değ./gerilme	B düzgün Q doğrusal	çift doğrusal	B doğrusal Q ikinci dereceden	dördüncü dereceden
Toplam ser. der.	9	12	18	27
$\mathbf{K}^L$ Isıl etki gerilmelerine bağlı Yer değiştirmelere /dönmelere bağlı	3 Hammer noktası *hayır* *hayır*	2 x 2 Gauss noktası *hayır* *hayır*	6 Hammer noktası *hayır* *hayır*	3 x 3 Gauss noktası *hayır* *hayır*
$\mathbf{K}_0^\sigma$ Isıl etki gerilmelerine bağlı Yer değiştirmelere /dönmelere bağlı	*aynı IPs* *evet* *hayır*	*aynı IPs* *evet* *hayır*	*aynı IPs* *evet* *hayır*	*aynı IPs* *evet* *hayır*
$\mathbf{K}^T = \mathbf{K}^L$ Isıl etki gerilmelerine bağlı Yer değiştirmelere /dönmelere bağlı	*aynı IPs* *hayır* *hayır*	*aynı IPs* *hayır* *hayır*	*aynı IPs* *hayır* *hayır*	*aynı IPs* *hayır* *hayır*
$\mathbf{F}^{ext}$ Isıl etki gerilmelerine bağlı Yer değiştirmelere /dönmelere bağlı	• noktasal (analitik) • düzgün (3 Hammer noktası) • trapezoidal (3 Hammer noktası) *hayır* *hayır*	• noktasal (analitik) • düzgün (2 x 2 Gauss noktası) • trapezoidal (2 x 2 Gauss noktası) *hayır* *hayır*	• noktasal (analitik) • düzgün (6 Hammer noktası) • trapezoidal (6 Hammer noktası) *hayır* *hayır*	• noktasal (analitik) • düzgün (3 x 3 Gauss noktası) • trapezoidal (3 x 3 Gauss noktası) *hayır* *hayır*
$\mathbf{F}_{lin}^{\text{int}} = \mathbf{F}_{nl}^{\text{int}}$ Isıl etki gerilmelerine bağlı Yer değiştirmelere /dönmelere bağlı	*aynı IPs* *evet (doğrusal)* *evet (doğrusal)* $\mathbf{F}_{lin}^{\text{int}} = -\mathbf{K}^L\ \mathbf{U}$	*aynı IPs* *evet (doğrusal)* *evet (doğrusal)* $\mathbf{F}_{lin}^{\text{int}} = -\mathbf{K}^L\ \mathbf{U}$	*aynı IPs* *evet (doğrusal)* *evet (doğrusal)* $\mathbf{F}_{lin}^{\text{int}} = -\mathbf{K}^L\ \mathbf{U}$	*aynı IPs* *evet (doğrusal)* *evet (doğrusal)* $\mathbf{F}_{lin}^{\text{int}} = -\mathbf{K}^L\ \mathbf{U}$

DOĞRUSAL OLMAYAN PLAK ELEMANLAR

`model_plate_gNL`

Mekanik model

Uyarı: Büyük şekil değiştirme / büyük yer değiştirme şartlarındaki bir plağın çoğunlukla bir kabuk gibi davranması sebebiyle normalde bu modeller kullanılmamalıdır. Bunların genellikle yüksek membran gerilmeleri ve bir membran / eğilme eşleştirmesi vardır.
Doğrusal plak modelleri gibi, bu elemanlarda eğilme ve enine-kayma rijitliği (düzlem dışı) bulunmakta, ancak membran rijitliği (düzlem içi) bulunmamaktadır. Bunlar da *Reissner-Mindlin* plak teorisini temel almaktadır, ancak büyük-şekil değiştirme/büyük-yer değiştirme formundadır (*tam doğrusal-olmayan teori*). Bu form, 2. derece şekil değiştirme terimleri, gerilme pekleşmesi, büyük yer değiştirmeler ve büyük dönmeleri dikkate almaktadır.
Bünye denklemlerinin elastik olması gerekmektedir (izotropik St-Venant tipinde ya da başlangıç tanjant düzleminde ortotropik olarak). Denklemler Piola-Kirchhoff-2 gerilme tensörü S ile Green-Lagrange gerilme tensörü E arasında ilişki kurmaktadır. Bunlar düzlem-gerilme biçimi içerisinde kullanılmaktadır. Doğrusal modelde yapılanlardan daha fazla yaklaşım yapılmamaktadır. Özellikle dönmelerin türevleri *tamamen kesindir*.

Kinematik, şekil değiştirmeler ve gerilmeler

Doğrusal elemanlar ile aynıdır ancak küçük şekil değiştirme tensörü ε yerine Green-Lagrange şekil değiştirme tensörü E ve Cauchy gerilme tensörü σ yerine PK2 gerilme tensörü S kullanılmaktadır.
Güncel yer değiştirme yapmış konfigürasyonda Cauchy tensörü, "doğal" gerilme tensörüdür. Bileşke Cauchy gerilmeleri (M(σ), Q(σ)), *(2)* ile verilen dönüşüm denklemleri kullanılarak bileşke PK2 gerilmelerinden (M(S), Q(S)) elde edilebilirler.

Geometri

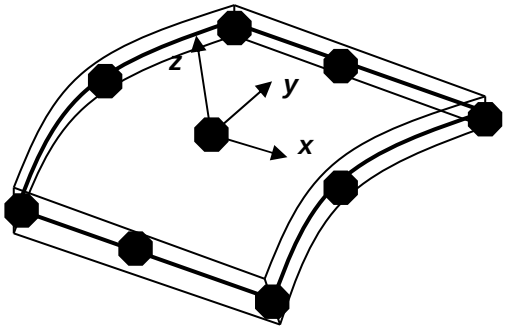
Doğrusal model için olduğu gibidir.

Yükler

Doğrusal model için olduğu gibidir.
Yüklerin *ölü* yük olarak dikkate alındığı not edilmelidir (elemanların pozisyonu ve şekil değiştirmelerinden bağımsız olarak). Hatta BASINÇ yükü de başlangıç konfigürasyonunda daima yüzeye dik doğrultudadır.
MOMENTUM yükleri esas olarak *sonradan gelen* yükler olduğundan doğrusal olmayan analizlerde dikkatle kullanılmalıdır. Yapacakları etkiler genellikle mevcut dönme durumuna bağlıdır.

	T3YÜZLÜ	**Q4YÜZLÜ**	**T6YÜZLÜ**	**Q9YÜZLÜ**
Geometri	düz	düz	düz (eğrisel sınırlar)	düz (eğrisel sınırlar)
Biçim fonksiyonları	*(3)*	*(4)*	*(5)*	*(6)*
Tip	izoparametrik	izoparametrik	izoparametrik	izoparametrik
Yer değ. / gerilmeler	B düzgün Q doğrusal	çift doğrusal	B doğrusal Q ikinci dereceden	dördüncü dereceden
Toplam ser. der.	9	12	18	27
$\mathbf{K}^{L}$ (doğ. modellerle aynı) Isıl etki gerilmelerine bağlı Yer değiştirmelere /dönmelere bağlı	3 Hammer noktası *hayır* *hayır*	2 x 2 Gauss noktası *hayır* *hayır*	6 Hammer noktası *hayır* *hayır*	3 x 3 Gauss noktası *hayır* *hayır*
$\mathbf{K}_{0}^{\sigma}$ Isıl etki gerilmelerine bağlı Yer değiştirmelere /dönmelere bağlı	*aynı IPs* *evet* *evet*	*aynı IPs* *evet* *evet*	*aynı IPs* *evet* *evet*	*aynı IPs* *evet* *evet*
$\mathbf{K}^{T} \neq \mathbf{K}^{L}$ (tam doğ. olm. rijitlik) Isıl etki gerilmelerine bağlı Yer değiştirmelere /dönmelere bağlı	*aynı IPs* *evet* *evet*	*aynı IPs* *evet* *evet*	*aynı IPs* *evet* *evet*	*aynı IPs* *evet* *evet*
$\mathbf{F}^{ext}$ (doğ. modellerle aynı) Isıl etki gerilmelerine bağlı Yer değiştirmelere /dönmelere bağlı	• noktasal (analitik) • düzgün (3 Hammer noktası) • trapezoidal (3 Hammer noktası) *hayır* *hayır*	• noktasal (analitik) • düzgün (2 x 2 Gauss noktası) • trapezoidal (2 x 2 Gauss noktası) *hayır* *hayır*	• noktasal (analitik) • düzgün (6 Hammer noktası) • trapezoidal (6 Hammer noktası) *hayır* *hayır*	• noktasal (analitik) • düzgün (3 x 3 Gauss noktası) • trapezoidal (3 x 3 Gauss noktası) *hayır* *hayır*
$\mathbf{F}_{lin}^{\text{int}}$ Isıl etki gerilmelerine bağlı Yer değiştirmelere /dönmelere bağlı	*aynı IPs* *evet* *evet*	*aynı IPs* *evet* *evet*	*aynı IPs* *evet* *evet*	*aynı IPs* *evet* *evet*
$\mathbf{F}_{nl}^{\text{int}}$ Isıl etki gerilmelerine bağlı Yer değiştirmelere /dönmelere bağlı	*aynı IPs* *evet* *evet*	*aynı IPs* *evet* *evet*	*aynı IPs* *evet* *evet*	*aynı IPs* *evet* *evet*

III-3 KABUK ELEMANLAR



DOĞRUSAL KABUK ELEMANLAR

`model_shell_lin`

Mekanik model

Bu elemanlarda membran rijitliği (düzlem içi), eğilme ve enine-kayma rijitliği (düzlem dışı) bulunmaktadır. Küçük-şekil değiştirme/küçük-yer değiştirme esaslı *Reissner-Mindlin* kabuk teorisini (doğrusal teori)[17] temel almaktadır. Bu teoride, kalınlık boyunca malzeme çizgileri sadece dönme yaparak şekil değiştirme yapmadan düz kalmakta ve enine kayma-şekil değiştirmesine izin verilmektedir (yüzeye dik malzeme çizgileri ile ortalama orta-yüzey arasındaki açı değişebilmektedir).
Bünye denklemlerinin elastik olması gerekmektedir (izotropik ya da tanjant düzlemi içinde ortotropik). Düzleme dik makaslama gerilmesinin (σ_{zz}) sıfır kabul edilmesi sebebiyle denklemler *düzlem-gerilmesi* formunda kullanılır.

Kinematik, şekil değiştirmeler ve gerilmeler

Bu elemanların her noktasında altı serbestlik derecesi bulunmaktadır (global eksen bazlı 3 yer değiştirme: Ux, Uy, Uz ve 3 dönme: Rx, Ry ve Rz)[18].
Şekil değiştirme/gerilme tensörleri (küçük şekil değiştirme teorisi) elemanın tanjant düzleminde tanımlanmıştır (her tümleştirme noktasında). Enine kayma terimleri düzgün yayılı kabul edilirken, düzlem içi terimler kalınlık boyunca doğrusal olarak değişiklik göstermektedir. Her düzlem-içi şekil değiştirme terimi, bir düzgün bölüme (membran terimi) ve merkezinde boş değer olan bir doğrusal terime (eğilme terimi) ayrıştırılırlar.
Bir elemanın içindeki normal doğrultmanı, iki tanjant vektörün çapraz çarpımı sonucuyla tanımlanan gerçek normaldir. Bu tanımlama, noktalardaki normalleri oluşturur ve bu şekilde elemanlar arasında süreksiz olan normal doğrultmanları elde edilir (kabuk eğrisel olduğunda). *z* koordinatı bu doğrultman boyuncadır.

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xx}(x,y,z) &= \varepsilon_{xx}^{M}(x,y) + z\,\varepsilon_{xx}^{B}(x,y) \\
\varepsilon_{yy}(x,y,z) &= \varepsilon_{yy}^{M}(x,y) + z\,\varepsilon_{yy}^{B}(x,y) \\
\varepsilon_{xy}(x,y,z) &= \varepsilon_{xy}^{M}(x,y) + z\,\varepsilon_{xy}^{B}(x,y) \\
\varepsilon_{xz}(x,y,z) &= \varepsilon_{xz}^{Q}(x,y) \\
\varepsilon_{yz}(x,y,z) &= \varepsilon_{yz}^{Q}(x,y)
\end{aligned}
\qquad
\begin{array}{llll}
\varepsilon_{xx}^{M} & \varepsilon_{yy}^{M} & \varepsilon_{xy}^{M} & \textit{membran} \\
\varepsilon_{xx}^{B} & \varepsilon_{yy}^{B} & \varepsilon_{xy}^{B} & \textit{eğilme} \\
\varepsilon_{xz}^{Q} & \varepsilon_{yz}^{Q} & & \textit{enine kayma}
\end{array}$$

Normal gerilmelerin sıfır olması kabulü sebebiyle (σ_{zz} = 0), makaslama enerjisi de sıfır kabul edilir ve düzleme dik şekil değiştirme ihmal edilebilir (ε_{zz} değeri 0 olur).

Gerilme tensörü ile şekil değiştirme tensörü arasında doğrusal bir ilişki olduğu varsayımıyla:

---

[17] *Büyük-şekil değiştirme/büyük-yer değiştirme teorisine dayanan geometrik rijitlik matrisi* $\mathbf{K}_0^{\sigma}$ *hariç.*

[18] *Düz sonlu elemanlar ağı durumunda ve sıfır burulma rijitliğinden (normal etrafında dönme) kaçınmak amacıyla dönme alanı için bu doğrultuda küçük bir yapay rijitlik eklenmiştir.*

$$\sigma = \mathbf{D}\,\varepsilon$$

gerilme bileşenleri şu şekilde de yazılabilir[19]:

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx}(x,y,z) &= \sigma_{xx}^{M}(x,y) + z\,\sigma_{xx}^{B}(x,y) \\
\sigma_{yy}(x,y,z) &= \sigma_{yy}^{M}(x,y) + z\,\sigma_{yy}^{B}(x,y) \\
\sigma_{xy}(x,y,z) &= \sigma_{xy}^{M}(x,y) + z\,\sigma_{xy}^{B}(x,y) \\
\sigma_{xz}(x,y,z) &= \sigma_{xz}^{Q}(x,y) \\
\sigma_{yz}(x,y,z) &= \sigma_{yz}^{Q}(x,y)
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
&\sigma_{xx}^{M} \quad \sigma_{yy}^{M} \quad \sigma_{xy}^{M} \quad \textit{membran} \\
&\sigma_{xx}^{B} \quad \sigma_{yy}^{B} \quad \sigma_{xy}^{B} \quad \textit{eğilme} \\
&\sigma_{xz}^{Q} \quad \sigma_{yz}^{Q} \quad \textit{enine kayma}
\end{aligned}$$

Sonuç gerilmeler aslında *bileşke* gerilmelerdir (kalınlık boyunca entegre edilmiş).
Bileşke gerilmeler[20] şu şekildedir:

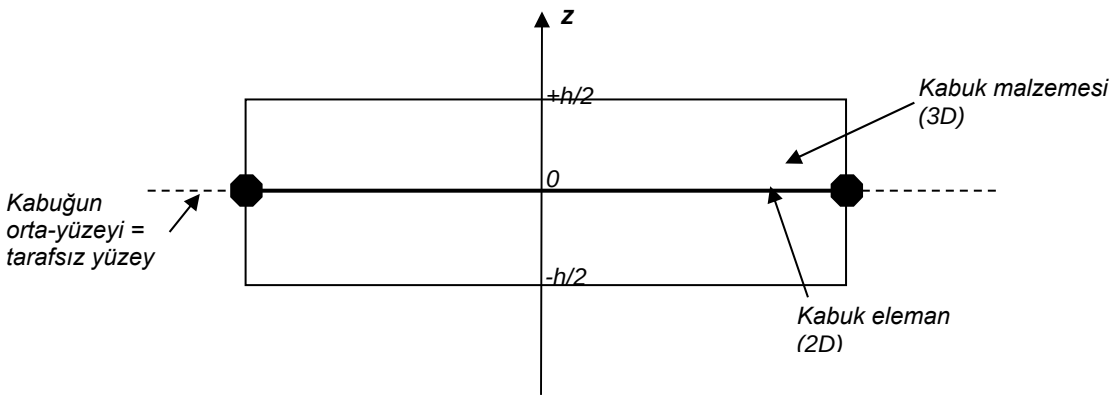
$$F_{xx} = \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} \sigma_{xx}\,dz \qquad F_{yy} = \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} \sigma_{yy}\,dz \qquad F_{xy} = \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} \sigma_{xy}\,dz$$

$$M_{xx} = \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} z\,\sigma_{xx}\,dz \qquad M_{yy} = \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} z\,\sigma_{yy}\,dz \qquad M_{xy} = \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} z\,\sigma_{xy}\,dz$$

$$Q_{x} = \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} \sigma_{xz}\,dz \qquad Q_{y} = \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} \sigma_{yz}\,dz$$

z = 0 yüzeyi sonlu elemanlar yüzeyi ile tanımlanmaktadır. Membran-eğilme eşleştirmesine olanak sunan orta-yüzeyin kaçık olması durumuna izin verilmektedir. Bu durumda z = 0 yüzeyi tarafsız yüzeyle eşdeğer olmamaktadır. Kaçıklık olmadığı durumda her iki yüzey de aynı olarak varsayılır[21].

Kaçıklık tanımlı olmayan kabuk (simetrik kabuk)



[19] *Burada enine kayma şekil değiştirmeleriyle düzlem-içi gerilmeler arasında bir eşleşmenin olmadığı bünye denklemleri kabul edilmiştir (bir Hooke yasası gibi). Aksi halde* $\sigma_{\alpha z}$ *gerilme bileşenlerine bir* $z\,\sigma_{\alpha z}^{Q'}$ *terimi eklenmelidir.*

[20] M *olarak belirtilen eğilme momentumu terimlerinin gerçek moment olmadığı not alınmalıdır.* M *bir tensördür.*

[21] *Kabuk eğrisel olduğu durumda bu tam olarak doğru değildir. Eğrilik, gerilme-şekil değiştirme ilişkisine ek bir kaçıklık ve eşleştirme getirmektedir. Bu etki ihmal edilmektedir.*

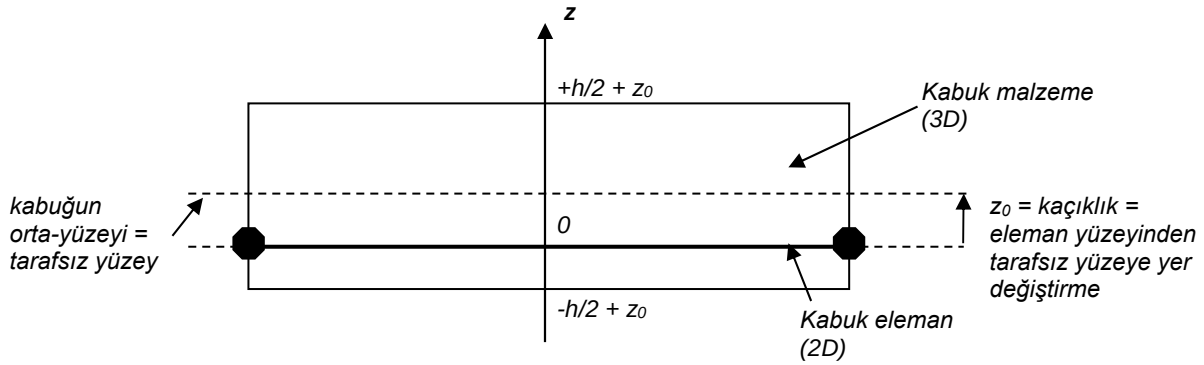
Bu durumda bileşke gerilmeler şu şekilde indirgenir:

$$F_{xx} = m\sigma_{xx}^{M} \qquad M_{xx} = b\sigma_{xx}^{B}$$
$$F_{yy} = m\sigma_{yy}^{M} \qquad M_{yy} = b\sigma_{yy}^{B} \qquad Q_x = hG\,\sigma_{xz}^{Q}$$
$$F_{xy} = m\sigma_{xy}^{M} \qquad M_{xy} = b\sigma_{xy}^{B} \qquad Q_y = hG\,\sigma_{yz}^{Q}$$

ile birlikte[22]:

$$m = h \quad b = \frac{h^3}{12} \quad G = \frac{5}{6}\frac{E}{2(1+\nu)}$$

Kaçıklık tanımlı olan kabuk (simetrik olmayan kabuk)



Bu durumda sonuç gerilmeler[23] şu şekildedir:

$$F_{xx} = h\sigma_{xx}^{M} + mb\,\sigma_{xx}^{B} \qquad M_{xx} = b\sigma_{xx}^{B} + mb\,\sigma_{xx}^{M}$$
$$F_{yy} = h\sigma_{yy}^{M} + mb\,\sigma_{yy}^{B} \qquad M_{yy} = b\sigma_{yy}^{B} + mb\,\sigma_{yy}^{M} \qquad Q_x = hG\,\sigma_{xz}^{Q}$$
$$F_{xy} = h\sigma_{xy}^{M} + mb\,\sigma_{xy}^{B} \qquad M_{xy} = b\sigma_{xy}^{B} + mb\,\sigma_{xy}^{M} \qquad Q_y = hG\,\sigma_{yz}^{Q}$$

ile birlikte[24]:

$$b = \frac{h^3}{12} + h\,z_0^2 \qquad mb = h\,z_0 \qquad G = \frac{5}{6}\frac{E}{2(1+\nu)}$$

z' = z – z₀ koordinatının tarafsız yüzeyde merkezlenmiş olduğu düşünülürse: ***z'*** koordinatında gerilme, tarafsız yüzeydeki M' momentumu ile birlikte şu şekildedir (*α* ve *β* değerleri *x* ya da *y* değerlerine eşit):

$$\sigma_{\alpha\beta}(x,y,z') = \frac{F_{\alpha\beta}(x,y)}{h} + z'\frac{M'_{\alpha\beta}(x,y)}{\frac{h^3}{12}}$$

$$\sigma_{\alpha z}(x,y,z') = \frac{Q_a(x,y)}{h}$$

---

[22] *Kullanıcı tarafından bünye denklemlerinde* m, b *ve* G *için farklı değerler tanımlanabilmektedir.*

[23] *Kaçıklıkla birlikte* F *tensörünün kabuğun orta-yüzeyindeki ortalama gerilme (h ile çarpılmış) olarak da tariflenebilecek gerilme olduğu not edilmelidir (elemanın z = 0 yüzeyindeki gerilme değil).*

[24] *Kullanıcı tarafından bünye denklemlerinde m, b, mb ve G için farklı değerler tanımlanabilmektedir.*

Bu nedenle, *z* koordinatı içinde (eleman yüzeyinde merkezlenmiş olarak) gerilme şu şekilde yazılır:

$$\sigma_{\alpha\beta}(x,y,z)=\frac{F_{\alpha\beta}(x,y)}{h}+(z-z_0)\frac{M_{\alpha\beta}(x,y)-z_0F_{\alpha\beta}(x,y)}{\frac{h^3}{12}}$$

$$\sigma_{az}(x,y,z)=\frac{Q_a(x,y)}{h}$$

Bu, kabuk elemanın üst ve alt dış yüzeyleri için şu sonucu verir (*x* ve *y* koordinatları dahil edilmediğinde):

$$\sigma_{\alpha\beta}\left(z=\frac{h}{2}+z_0\right)=\frac{F_{\alpha\beta}}{h}\left(1-\frac{6z_0}{h}\right)+\frac{6}{h^2}M_{\alpha\beta}$$

$$\sigma_{\alpha\beta}\left(z=-\frac{h}{2}+z_0\right)=\frac{F_{\alpha\beta}}{h}\left(1+\frac{6z_0}{h}\right)-\frac{6}{h^2}M_{\alpha\beta}$$

Geometri

Bu elemanların düzgün yayılı kalınlığı ve kaçıklıklığı bulunmaktadır (değişkenlik yoktur ancak elemanlar arasında kalınlık ve kaçıklık değeri farklı olabilir). Plak model içerisindeki bütün elemanlar model tanımı içindeki düzlemin içerisinde yer almalıdır. İkinci dereceden T6 ve Q9 elemanları eğrisel olabilir.

Yükler

Mekanik yükler (KUVVET ve MOMENTUM), noktasal, düzgün yayılı, trapezoidal ya da basınç yükü olabilir. Plak modelde yükün yalnızca düzleme dik bileşeni (KUVVET yükü için) etkilidir. Düzlem-içi bileşenler herhangi bir etki yaratmamaktadır. Bir MOMENTUM yükü için bu durumun tam tersi olmaktadır.
Isıl yükler her bir eleman üzerinde kalınlık boyunca sıcaklığın doğrusal değiştiği şekilde sadece düzgün yayılı halde olabilir (bir miktar ısıl eğilme şekil değiştirmeleri oluşturarak).

Notlar

• Q4YÜZLÜ plak elemanı, kilitlenme durumuna karşı özel bir enine-kayma entegrasyonuna sahiptir. Kullanılan formül genellikle Q4ANS ya da Q4γ [BAT] olarak anılmaktadır.
Q9YÜZLÜ plak elemanı da kilitlenme durumuna karşı özel bir enine-kayma entegrasyonuna sahiptir [HUA].
• Düşük dereceli elemanlar için (T3 and Q4), basit-mesnetli veya kenetlenmiş sınırlar yakınında enine-kayma gerilmesi düzensiz görünebilir. Bu durum reaksiyonların da düzensiz olmasına sebep olur. Bu sınırlar yakınında daha sık bir sonlu elemanlar ağı ya da daha yüksek dereceli elemanların (T6 and Q9) kullanımı çözümü iyileştirebilir.
• Plak elemanın kütlesi ve sönüm değeri yoktur.

	T3YÜZLÜ	Q4YÜZLÜ	T6YÜZLÜ	Q9YÜZLÜ
Geometri	doğrusal	çift doğrusal	ikinci dereceden	dördüncü dereceden
Biçim fonksiyonları	*(3)*	*(4)*	*(5)*	*(6)*
Tip	izoparametrik	izoparametrik	izoparametrik	izoparametrik
Şekil değ./gerilmeler	M & B düzgün Q doğrusal	çift doğrusal	M & B doğrusal Q ikinci dereceden	dördüncü dereceden
Toplam ser. derecesi	18	24	36	54
$\mathbf{K}^L$ Isıl etki gerilmelerine bağlı Yer değiştirmelere / dönmelere bağlı	3 Hammer noktası *hayır* *hayır*	2 x 2 Gauss noktası *hayır* *hayır*	6 Hammer noktası *hayır* *hayır*	3 x 3 Gauss noktası *hayır* *hayır*
$\mathbf{K}_0^\sigma$ Isıl etki gerilmelerine bağlı Yer değiştirmelere / dönmelere bağlı	*aynı IPs* *evet* *hayır*	*aynı IPs* *evet* *hayır*	*aynı IPs* *evet* *hayır*	*aynı IPs* *evet* *hayır*
$\mathbf{K}^T = \mathbf{K}^L$ Isıl etki gerilmelerine bağlı Yer değiştirmelere / dönmelere bağlı	*aynı IPs* *hayır* *hayır*	*aynı IPs* *hayır* *hayır*	*aynı IPs* *hayır* *hayır*	*aynı IPs* *hayır* *hayır*
$\mathbf{F}^{ext}$ Isıl etki gerilmelerine bağlı Yer değiştirmelere / dönmelere bağlı	• noktasal (analitik) • düzgün (3 Hammer noktası) • trapezoidal (3 Hammer noktası) *hayır* *hayır*	• noktasal (analitik) • düzgün (2 x 2 Gauss noktası) • trapezoidal (2 x 2 Gauss noktası) *hayır* *hayır*	• noktasal (analitik) • düzgün (6 Hammer noktası) • trapezoidal (6 Hammer noktası) *hayır* *hayır*	• noktasal (analitik) • düzgün (3 x 3 Gauss noktası) • trapezoidal (3 x 3 Gauss noktası) *hayır* *hayır*
$\mathbf{F}_{lin}^{\text{int}} = \mathbf{F}_{nl}^{\text{int}}$ Isıl etki gerilmelerine bağlı Yer değiştirmelere / dönmelere bağlı	*aynı IPs* *evet (doğrusal)* *evet (doğrusal)* $\mathbf{F}_{lin}^{\text{int}} = -\mathbf{K}^L\ \mathbf{U}$	*aynı IPs* *evet (doğrusal)* *evet (doğrusal)* $\mathbf{F}_{lin}^{\text{int}} = -\mathbf{K}^L\ \mathbf{U}$	*aynı IPs* *evet (doğrusal)* *evet (doğrusal)* $\mathbf{F}_{lin}^{\text{int}} = -\mathbf{K}^L\ \mathbf{U}$	*aynı IPs* *evet (doğrusal)* *evet (doğrusal)* $\mathbf{F}_{lin}^{\text{int}} = -\mathbf{K}^L\ \mathbf{U}$

DOĞRUSAL OLMAYAN KABUK ELEMANLAR

`model_shell_gNL`

Mekanik model

Doğrusal kabuk modelleri gibi, bu elemanlarda membran rijitliği (düzlem içi), eğilme ve enine-kayma rijitliği (düzlem dışı) bulunmaktadır. Bunlar da *Reissner-Mindlin* kabuk teorisini temel almaktadır, ancak büyük-şekil değiştirme/büyük-yer değiştirme formundadır (*tam doğrusal-olmayan teori*). Bu form, 2. derece şekil değiştirme terimleri, gerilme pekleşmesi, büyük yerdeğiştirmeler ve büyük dönmeleri dikkate almaktadır.
Bünye denklemlerinin elastik olması gerekmektedir (izotropik St-Venant tipinde ya da başlangıç tanjant düzleminde ortotropik olarak). Denklemler Piola-Kirchhoff-2 gerilme tensörü *S* ile Green-Lagrange gerilme tensörü *E* arasında ilişki kurmaktadır. Bunlar düzlem-gerilme formuda kullanılmaktadır.
Doğrusal modelde yapılanlardan daha fazla yaklaşım yapılmamaktadır. Özellikle dönmelerin türevleri *tamamen kesindir*.

Kinematik, şekil değiştirmeler ve gerilmeler

Doğrusal elemanlar ile aynıdır ancak küçük şekil değiştirme tensörü ε yerine Green-Lagrange şekil değiştirme tensörü *E* ve Cauchy gerilme tensörü σ yerine PK2 gerilme tensörü *S* kullanılmaktadır.
Güncel yer değiştirme yapmış konfigürasyonda Cauchy tensörü, "doğal" gerilme tensörüdür. Bileşke Cauchy gerilmeleri (F(σ), M(σ), Q(σ)), *(2)* ile verilen dönüşüm denklemleri kullanılarak bileşke PK2 gerilmelerinden (F(S), M(S), Q(S)) elde edilebilirler.

Geometri

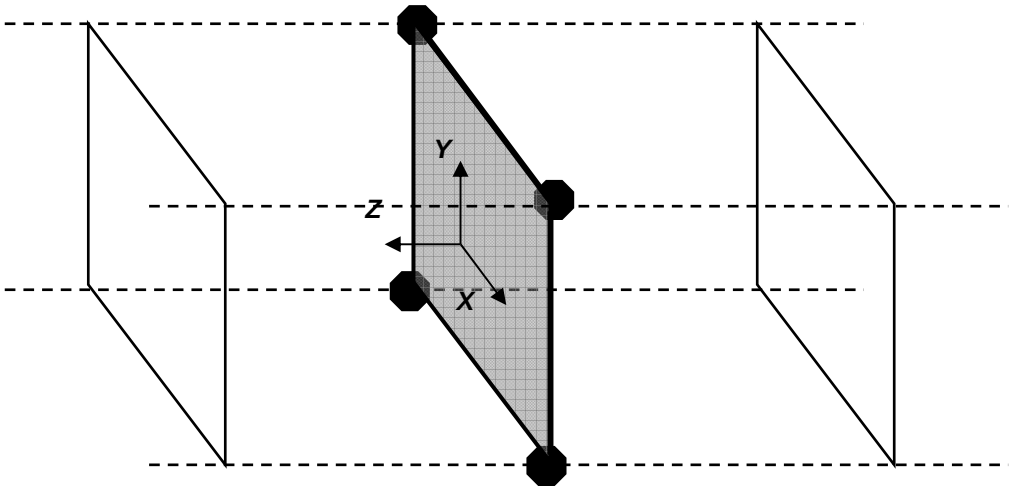
Doğrusal model için olduğu gibidir.

Yükler

Doğrusal model için olduğu gibidir.
Yüklerin *ölü* yük olarak dikkate alındığı not edilmelidir (elemanların pozisyonu ve şekil değiştirmelerinden bağımsız olarak). Hatta BASINÇ yükü de başlangıç konfigürasyonunda daima yüzeye dik doğrultudadır. MOMENTUM yükleri esas olarak *sonradan gelen* yükler olduğundan doğrusal olmayan analizlerde dikkatle kullanılmalıdır. Yapacakları etkiler genellikle mevcut dönme durumuna bağlıdır ve bu etkiler ihmal edilir.

	T3YÜZLÜ	**Q4YÜZLÜ**	**T6YÜZLÜ**	**Q9YÜZLÜ**
Geometri	doğrusal	çift doğrusal	ikinci dereceden	dördüncü dereceden
Biçim fonksiyonları	*(3)*	*(4)*	*(5)*	*(6)*
Tip	izoparametrik	izoparametrik	izoparametrik	izoparametrik
Şekil değ./gerilmeler	M & B düzgün Q doğrusal	çift doğrusal	M & B doğrusal Q ikinci dereceden	dördüncü dereceden
Toplam ser. der.	18	24	36	54
$\mathbf{K}^{L}$ (doğ. modellerle aynı)	3 Hammer noktası	2 x 2 Gauss noktası	6 Hammer noktası	3 x 3 Gauss noktası
Isıl etki	*hayır*	*hayır*	*hayır*	*hayır*
gerilmelerine bağlı				
Yer değiştirmelere / dönmelere bağlı	*hayır*	*hayır*	*hayır*	*hayır*
$\mathbf{K}_{0}^{\sigma}$	*aynı IPs*	*aynı IPs*	*aynı IPs*	*aynı IPs*
Isıl etki	*evet*	*evet*	*evet*	*evet*
gerilmelerine bağlı				
Yer değiştirmelere / dönmelere bağlı	*evet*	*evet*	*evet*	*evet*
$\mathbf{K}^{T} \neq \mathbf{K}^{L}$ (tam doğ. olm. rijitlik)	*aynı IPs*	*aynı IPs*	*aynı IPs*	*aynı IPs*
Isıl etki	*evet*	*evet*	*evet*	*evet*
gerilmelerine bağlı				
Yer değiştirmelere / dönmelere bağlı	*evet*	*evet*	*evet*	*evet*
$\mathbf{F}^{ext}$ (doğ. modellerle aynı)	• noktasal (analitik) • düzgün (3 Hammer noktası) • trapezoidal (3 Hammer noktası)	• noktasal (analitik) • düzgün (2 x 2 Gauss noktası) • trapezoidal (2 x 2 Gauss noktası)	• noktasal (analitik) • düzgün (6 Hammer noktası) • trapezoidal (6 Hammer noktası)	• noktasal (analitik) • düzgün (3 x 3 Gauss noktası) • trapezoidal (3 x 3 Gauss noktası)
Isıl etki	*hayır*	*hayır*	*hayır*	*hayır*
gerilmelerine bağlı				
Yer değiştirmelere / dönmelere bağlı	*hayır*	*hayır*	*hayır*	*hayır*
$\mathbf{F}_{lin}^{\mathrm{int}}$	*aynı IPs*	*aynı IPs*	*aynı IPs*	*aynı IPs*
Isıl etki	*evet*	*evet*	*evet*	*evet*
gerilmelerine bağlı				
Yer değiştirmelere / dönmelere bağlı	*evet*	*evet*	*evet*	*evet*
$\mathbf{F}_{nl}^{\mathrm{int}}$	*aynı IPs*	*aynı IPs*	*aynı IPs*	*aynı IPs*
Isıl etki	*evet*	*evet*	*evet*	*evet*
gerilmelerine bağlı				
Yer değiştirmelere / dönmelere bağlı	*evet*	*evet*	*evet*	*evet*

III-4 DÜZLEMSEL ŞEKİL DEĞİŞTİRME ELEMANLARI



DOĞRUSAL DÜZLEMSEL ŞEKİL DEĞİŞTİRME ELEMANLARI

`model_plane_strain_lin`

Mekanik model

Bu elemanlar sadece "membran" rijitliğine sahiptir (düzlem içinde). Bu elemanlar küçük yer değiştirme teorisini temel almaktadır (doğrusal teori)[25]. Düzlem, global eksen bazlı üç doğal düzlemden biri olmalıdır: Z=sabit (ön tanımlı), X=sabit ya da Y=sabit.
Bu modeller için temel varsayım, normal yöndeki deformasyonun yok kabul edilmesi ve yer değiştirmenin ve yer değiştirme/gerilme alanlarının bu yöndeki koordinat boyunca bağımsızlığıdır.
Bünye denklemlerinin tam 3-D elastik yasa olması gerekmektedir (düzlemde izotropik ya da ortotropik).

Kinematik, şekil değiştirmeler ve gerilmeler

Bu elemanların her noktasında iki serbestlik derecesi bulunmaktadır (düzlemde 2 yer değiştirme).

Düzlem	Serbestlik Derecesi
Z = sabit	Ux, Uy
X = sabit	Uy, Uz
Y = sabit	Ux, Uz

Şekil değiştirme/gerilme tensörleri elemanların düzlemlerinde tanımlanmıştır (her tümleştirme noktasında). Yer değiştirmeler, şekil değiştirme ve gerilme kalınlık boyunca düzgün olarak dikkate alınmıştır.
Normal şekil değiştirmenin varsayımda yok kabul edilmesinden dolayı (ε_{zz}=0), normal gerilme σ_{zz} rijitlik matrisine öncülük eden enerji denklemlerinde elimine edilebilir. Ancak, bu terim yok sayılmaktan uzakta olmakta ve hesaplanan durumdan elde edilebilmektedir.

Geometri

Bu elemanların kalınlıkları düzgün ve benzerdir (tek değer tanımlanmış halde). Bütün elemanlar model tanımının düzlemi içinde olmalıdır. İkinci dereceden elemanlar olan T6 ve Q9 eğrisel olamaz (ancak sınır hatları olabilir).

---

[25] *Büyük-şekil değiştirme teorisine dayanan geometrik rijitlik matrisi* $\mathbf{K}_0^{\sigma}$ *hariç.*

Yükler

Mekanik yükler (KUVVET) noktasal, düzgün yayılı, trapezoidal yayılı ya da basınç yükü (bu modeller için düzgün yayılı ile aynı) olabilirler. Plaka modelinde sadece yükün düzlem içindeki bölümü etkindir. Düzlem dışındaki bileşeni herhangi bir etki oluşturmaz.
Isıl yükler sadece her eleman üzerinde düzgün ve kalınlık boyunca düzgün yayılı şekilde olabilir.

Notlar

• Düzlem-şekil değiştirme elemanının kütlesi ve sönüm değeri yoktur.

	T3YÜZLÜ	**Q4YÜZLÜ**	**T6YÜZLÜ**	**Q9YÜZLÜ**
Geometri	düz	düz	düz (eğrisel sınırlar)	düz (eğrisel sınırlar)
Biçim fonk.	*(3)*	*(4)*	*(5)*	*(6)*
Tip	izoparametrik	izoparametrik	izoparametrik	izoparametrik
Gerilme/şek. değ.	B düzgün Q doğrusal	çift doğrusal	B doğrusal Q ikinci dereceden	dördüncü dereceden
Toplam ser. der.	6	8	12	18
$\mathbf{K}^L$ Isıl etki ger. bağlı Yer değiştirmelere bağlı	1 Hammer noktası *hayır* *hayır*	2 x 2 Gauss noktası *hayır* *hayır*	6 Hammer noktası *hayır* *hayır*	3 x 3 Gauss noktası *hayır* *hayır*
$\mathbf{K}_0^\sigma$ Isıl etki ger. bağlı Yer değiştirmelere bağlı	*aynı IPs* *yes* *hayır*	*aynı IPs* *yes* *hayır*	*aynı IPs* *yes* *hayır*	*aynı IPs* *yes* *hayır*
$\mathbf{K}^T = \mathbf{K}^L$ Isıl etki ger. bağlı Yer değiştirmelere bağlı	*aynı IPs* *hayır* *hayır*	*aynı IPs* *hayır* *hayır*	*aynı IPs* *hayır* *hayır*	*aynı IPs* *hayır* *hayır*
$\mathbf{F}^{ext}$ Isıl etki ger. bağlı Yer değiştirmelere bağlı	• noktasal (analitik) • düzgün (3 Hammer noktası) • trapezoidal (3 Hammer noktası) *hayır* *hayır*	• noktasal (analitik) • düzgün (2 x 2 Gauss noktası) • trapezoidal (2 x 2 Gauss noktası) *hayır* *hayır*	• noktasal (analitik) • düzgün (6 Hammer noktası) • trapezoidal (6 Hammer noktası) *hayır* *hayır*	• noktasal (analitik) • düzgün (3 x 3 Gauss noktası) • trapezoidal (3 x 3 Gauss noktası) *hayır* *hayır*
$\mathbf{F}_{lin}^{\text{int}} = \mathbf{F}_{nl}^{\text{int}}$ Isıl etki ger. bağlı Yer değiştirmelere bağlı	*aynı IPs* *evet (doğrusal)* *evet (doğrusal)* $\mathbf{F}_{lin}^{\text{int}} = -\mathbf{K}^L\ \mathbf{U}$	*aynı IPs* *evet (doğrusal)* *evet (doğrusal)* $\mathbf{F}_{lin}^{\text{int}} = -\mathbf{K}^L\ \mathbf{U}$	*aynı IPs* *evet (doğrusal)* *evet (doğrusal)* $\mathbf{F}_{lin}^{\text{int}} = -\mathbf{K}^L\ \mathbf{U}$	*aynı IPs* *evet (doğrusal)* *evet (doğrusal)* $\mathbf{F}_{lin}^{\text{int}} = -\mathbf{K}^L\ \mathbf{U}$

DOĞRUSAL OLMAYAN DÜZLEMSEL ŞEKİL DEĞİŞTİRME ELEMANLARI

`model_plane_strain_gNL`

Mekanik model

Doğrusal düzlem-şekil değiştirme elemanları gibi bu elemanlar da sadece “membran” rijitliğine sahiptir (düzlem içinde). Bu elemanlar düzlem-şekil değiştirme teorisinin büyük-şekil değiştirme formunu temel almaktadır (*tam doğrusal olmayan teori*). Bu form 2. derece şekil değiştirme terimlerini, gerilme pekleşmesini ve büyük yer değiştirmeleri dikkate almaktadır.
Düzlem, global eksen bazlı üç doğal düzlemden biri olmalıdır: Z=sabit (ön tanımlı), X=sabit ya da Y=sabit.
Bu modeller için temel varsayım, normal yöndeki şekil değiştirmenin yok kabul edilmesi ve yer değiştirmenin ve şekil değiştirme/gerilme alanlarının bu yöndeki koordinat boyunca bağımsız olmasıdır.
Bünye denklemlerinin tam 3-D elastik yasaya uygun olması gerekir (izotropik St-Venant türü ya da düzlem içinde ortotropik). Yasa, Piola-Kirchhoff-2 gerilme tensörü S ile Green-Lagrange şekil değiştirme tensörü E arasında bağlantı kurar.

Kinematik, şekil değiştirmeler ve gerilmeler

Doğrusal elemanlar ile aynıdır ancak küçük şekil değiştirme tensörü ε yerine Green-Lagrange şekil değiştirme tensörü E ve Cauchy gerilme tensörü σ yerine PK2 gerilme tensörü S kullanılmaktadır.

Güncel yer değiştirme yapmış konfigürasyonda Cauchy tensörü, "doğal" gerilme tensörüdür. Sonuç Cauchy gerilmesi (σ), *(2)* ile verilen dönüşüm denklemleri kullanılarak sonuç PK2 gerilmesinden (S) elde edilebilir.

Geometri

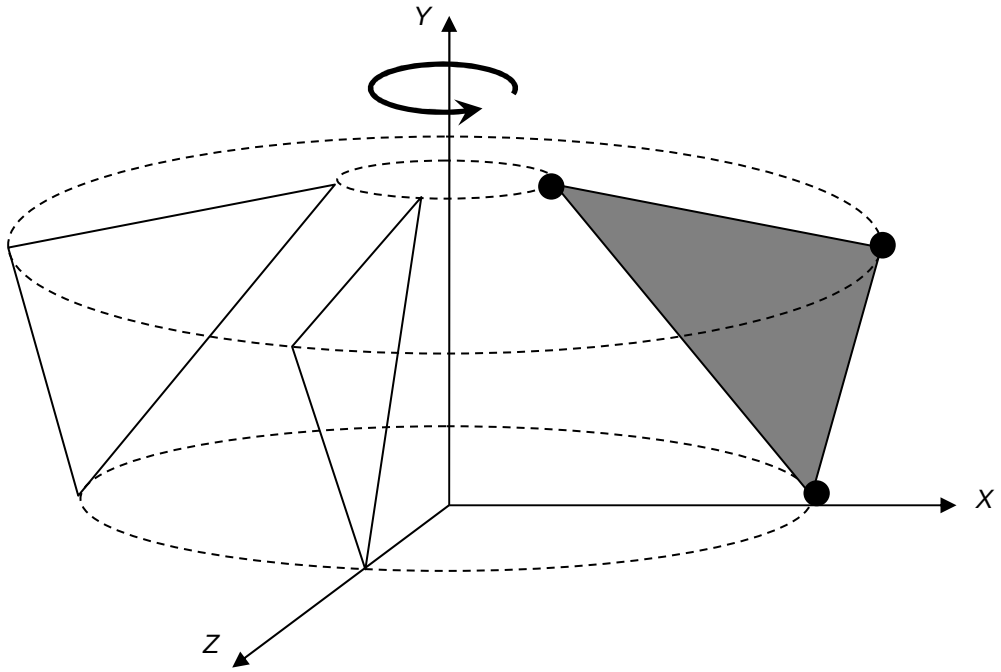
Doğrusal model için olduğu gibidir.

Yükler

Doğrusal model için olduğu gibidir.
Yüklerin *ölü* yük olarak dikkate alındığı not edilmelidir (elemanların pozisyonu ve şekil değiştirmelerinden bağımsız olarak).

	T3YÜZLÜ	Q4YÜZLÜ	T6YÜZLÜ	Q9YÜZLÜ
Geometri	düz	düz	düz (eğrisel sınırlar)	düz (eğrisel sınırlar)
Biçim fonksiyonları	*(3)*	*(4)*	*(5)*	*(6)*
Tip	izoparametrik	izoparametrik	izoparametrik	izoparametrik
Gerilme/şek. değ.	B düzgün Q doğrusal	çift doğrusal	B doğrusal Q ikinci dereceden	dördüncü dereceden
Toplam ser. der.	6	8	12	18
$\mathbf{K}^{L}$ (doğ. model ile aynı) Isıl etki ger. bağlı Yer değiştirmelere bağlı	1 Hammer noktası *hayır* *hayır*	2 x 2 Gauss noktası *hayır* *hayır*	6 Hammer noktası *hayır* *hayır*	3 x 3 Gauss noktası *hayır* *hayır*
$\mathbf{K}_{0}^{\sigma}$ Isıl etki ger. bağlı Yer değiştirmelere bağlı	*aynı IPs* *evet* *evet*	*aynı IPs* *evet* *evet*	*aynı IPs* *evet* *evet*	*aynı IPs* *evet* *evet*
$\mathbf{K}^{T} \neq \mathbf{K}^{L}$ (tam doğ. olm. rijitlik) Isıl etki ger. bağlı Yer değiştirmelere bağlı	*aynı IPs* *evet* *evet*	*aynı IPs* *evet* *evet*	*aynı IPs* *evet* *evet*	*aynı IPs* *evet* *evet*
$\mathbf{F}^{ext}$ (doğ. modellerle aynı şekilde) Isıl etki ger. bağlı Yer değiştirmelere bağlı	• noktasal (analitik) • düzgün (3 Hammer noktası) • trapezoidal (3 Hammer noktası) *hayır* *hayır*	• noktasal (analitik) • düzgün (2 x 2 Gauss noktası) • trapezoidal (2 x 2 Gauss noktası) *hayır* *hayır*	• noktasal (analitik) • düzgün (6 Hammer noktası) • trapezoidal (6 Hammer noktası) *hayır* *hayır*	• noktasal (analitik) • düzgün (3 x 3 Gauss noktası) • trapezoidal (3 x 3 Gauss noktası) *hayır* *hayır*
$\mathbf{F}_{lin}^{\text{int}}$ Isıl etki ger. bağlı Yer değiştirmelere bağlı	*aynı IPs* *evet* *evet*	*aynı IPs* *evet* *evet*	*aynı IPs* *evet* *evet*	*aynı IPs* *evet* *evet*
$\mathbf{F}_{nl}^{\text{int}}$ Isıl etki ger. bağlı Yer değiştirmelere bağlı	*aynı IPs* *evet* *evet*	*aynı IPs* *evet* *evet*	*aynı IPs* *evet* *evet*	*aynı IPs* *evet* *evet*

III-5 3D EKSENEL SİMETRİK ELEMANLAR



DOĞRUSAL EKSENEL SİMETRİK ELEMANLAR

`model_axi3d_lin`

Mekanik model

Bu elemanlarda sadece *XY* rijitliği (düzlem-içi) bulunmaktadır. Tanımlamalar Z = 0 düzleminde yapılmıştır ve simetri ekseni Y 'dir. Küçük-şekil değiştirme teorisini temel almaktadır (doğrusal teori)[26].
Bu modeller için kabul, yer değiştirme, şekil değiştirme ve gerilme tanım alanlarının tam eksenel-simetriği şeklindedir.
Bünye denklemleri, düzlem-şekil değiştirme modellerine benzer şekilde tam 3-D yasası çerçevesinde olmalıdır (*XY* düzlemi içerisinde izotropik ya da ortotropik).

Kinematik, şekil değiştirmeler ve gerilmeler

Bu elemanların her noktasında iki serbestlik derecesi bulunmaktadır (global eksen bazlı 2 yer değiştirme: Ux ve Uy). Şekil değiştirme/gerilme tensörleri (küçük şekil değiştirme teorisi) elemanın düzlemi içinde tanımlanmıştır (her tümleştirme noktasında):

ε_{xx}, ε_{xy}, ε_{yy}, ε_{zz}
σ_{xx}, σ_{xy}, σ_{yy}, σ_{zz}

Diğer terimler 0 olarak kabul edilir ($\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz}$ 0, $\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$).

Burada zz terimlerinin düzlem-şekil değiştirme modellerinden farklı şekilde 0 olduğu not edilmelidir.

Geometri

Bu elemanların kalınlıkları düzgün ve benzerdir (tek değer tanımlanmış halde). Bütün elemanlar model tanımının düzlemi içinde olmalıdır. İkinci dereceden elemanlar olan T6 ve Q9 eğrisel olamaz (ancak sınır hatları olabilir).

---

[26] *Büyük-şekil değiştirme teorisine dayanan geometrik rijitlik matrisi* $\mathbf{K}_0^{\sigma}$ *hariç.*

Önemli not:
Eksenel simetriye uymak için modelin Y aksına geçmemesi gerekmektedir.

Yükler

Mekanik yükler (KUVVET) noktasal, düzgün yayılı, trapezoidal yayılı olabilirler. Sadece yükün düzlem içindeki bölümü etkindir. Düzlem dışındaki bileşeni herhangi bir etki oluşturmaz.
Isıl yükler her eleman üzerinde düzgün ve doğrusal değişken şekilde olabilir.

Notlar

• Eksenel simetrik elemanın kütlesi ve sönüm değeri yoktur.

	T3YÜZLÜ	**Q4YÜZLÜ**	**T6YÜZLÜ**	**Q9YÜZLÜ**
Geometri	düz	düz	düz (eğrisel sınırlar)	düz (eğrisel sınırlar)
Biçim fonksiyonları	*(3)*	*(4)*	*(5)*	*(6)*
Tip	izoparametrik	izoparametrik	izoparametrik	izoparametrik
Şekil değ. / ger.	düzgün	çift doğrusal	çift doğrusal	dördüncü dereceden
Toplam ser. der.	6	8	12	18
$\mathbf{K}^L$ Isıl etki gerilmelerine bağlı Yer değiştirmelere bağlı	3 Hammer noktası *hayır* *hayır*	2 x 2 Gauss noktası *hayır* *hayır*	6 Hammer noktası *hayır* *hayır*	3 x 3 Gauss noktası *hayır* *hayır*
$\mathbf{K}_0^\sigma$ Isıl etki gerilmelerine bağlı Yer değiştirmelere bağlı	*aynı IPs* *evet* *hayır*	*aynı IPs* *evet* *hayır*	*aynı IPs* *evet* *hayır*	*aynı IPs* *evet* *hayır*
$\mathbf{K}^T = \mathbf{K}^L$ Isıl etki gerilmelerine bağlı Yer değiştirmelere bağlı	*aynı IPs* *hayır* *hayır*	*aynı IPs* *hayır* *hayır*	*aynı IPs* *hayır* *hayır*	*aynı IPs* *hayır* *hayır*
$\mathbf{F}^{ext}$ Isıl etki gerilmelerine bağlı Yer değiştirmelere bağlı	• noktasal (analitik) • düzgün (3 Hammer noktası) • trapezoidal (3 Hammer noktası) *hayır* *hayır*	• noktasal (analitik) • düzgün (2 x 2 Gauss noktası) • trapezoidal (2 x 2 Gauss noktası) *hayır* *hayır*	• noktasal (analitik) • düzgün (6 Hammer noktası) • trapezoidal (6 Hammer noktası) *hayır* *hayır*	• noktasal (analitik) • düzgün (3 x 3 Gauss noktası) • trapezoidal (3 x 3 Gauss noktası) *hayır* *hayır*
$\mathbf{F}_{lin}^{\text{int}} = \mathbf{F}_{nl}^{\text{int}}$ Isıl etki gerilmelerine bağlı Yer değiştirmelere bağlı	*aynı IPs* *evet (doğrusal)* *evet (doğrusal)* $\mathbf{F}_{lin}^{\text{int}} = -\mathbf{K}^L\ \mathbf{U}$	*aynı IPs* *evet (doğrusal)* *evet (doğrusal)* $\mathbf{F}_{lin}^{\text{int}} = -\mathbf{K}^L\ \mathbf{U}$	*aynı IPs* *evet (doğrusal)* *evet (doğrusal)* $\mathbf{F}_{lin}^{\text{int}} = -\mathbf{K}^L\ \mathbf{U}$	*aynı IPs* *evet (doğrusal)* *evet (doğrusal)* $\mathbf{F}_{lin}^{\text{int}} = -\mathbf{K}^L\ \mathbf{U}$

DOĞRUSAL OLMAYAN EKSENEL SİMETRİK ELEMANLAR

`model_axi3d_gNL`

Mekanik model

Doğrusal eksenel simetrik modelleri gibi bu elemanlar da sadece düzlem-içi rijitliğine sahiptir (Z = 0). Büyük şekil değiştirme teorisini temel almaktadır (*tam doğrusal olmayan teori*). Bu form 2. derece şekil değiştirme terimlerini, gerilme pekleşmesini ve büyük yer değiştirmeleri dikkate almaktadır.
Bünye denklemlerinin tam 3-D elastik yasaya uygun olması gerekir (izotropik St-Venant türü ya da düzlem içinde ortotropik). Yasa, Piola-Kirchhoff-2 gerilme tensörü *S* ile Green-Lagrange şekil değiştirme tensörü *E* arasında bağlantı kurar.

Kinematik, şekil değiştirmeler ve gerilmeler

Doğrusal elemanlar ile aynıdır ancak küçük şekil değiştirme tensörü ε yerine Green-Lagrange şekil değiştirme tensörü *E* ve Cauchy gerilme tensörü σ yerine PK2 gerilme tensörü *S* kullanılmaktadır.
Güncel yer değiştirme yapmış konfigürasyonda Cauchy tensörü, "doğal" gerilme tensörüdür. Sonuç Cauchy gerilmesi (σ), *(2)* ile verilen dönüşüm denklemleri kullanılarak sonuç PK2 gerilmesinden (*S*) elde edilebilir.

Geometri

Doğrusal model için olduğu gibidir.

Önemli not:

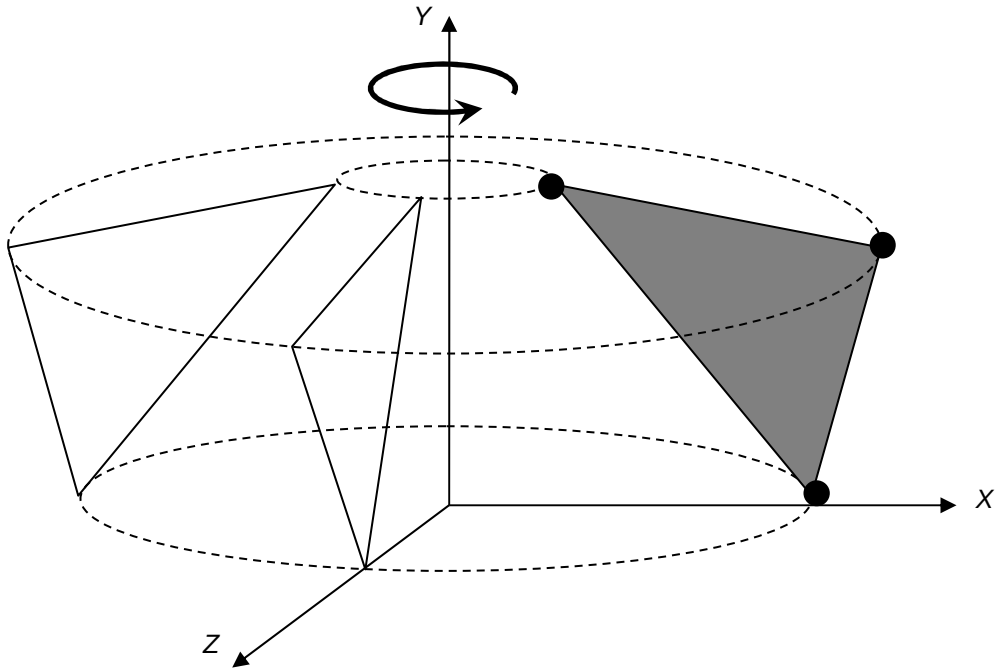
Eksenel simetriye uymak için modelin Y aksına geçmemesi gerekmektedir.

Yükler

Doğrusal model için olduğu gibidir.
Yüklerin *ölü* yük olarak dikkate alındığı not edilmelidir (elemanların pozisyonu ve şekil değiştirmelerinden bağımsız olarak).

	T3YÜZLÜ	Q4YÜZLÜ	T6YÜZLÜ	Q9YÜZLÜ
Geometri	düz	düz	düz (eğrisel sınırlar)	düz (eğrisel sınırlar)
Biçim fonksiyonları	*(3)*	*(4)*	*(5)*	*(6)*
Tip	izoparametrik	izoparametrik	izoparametrik	izoparametrik
Şekil değ. / ger.	düzgün	çift doğrusal	çift doğrusal	dördüncü dereceden
Toplam ser. der.	6	8	12	18
$\mathbf{K}^{L}$ (doğ. modelle aynı) Isıl etki gerilmelerine bağlı Yer değiştirmelere bağlı	3 Hammer noktası *hayır* *hayır*	2 x 2 Gauss noktası *hayır* *hayır*	6 Hammer noktası *hayır* *hayır*	3 x 3 Gauss noktası *hayır* *hayır*
$\mathbf{K}_{0}^{\sigma}$ Isıl etki gerilmelerine bağlı Yer değiştirmelere bağlı	*aynı IPs* *evet* *evet*	*aynı IPs* *evet* *evet*	*aynı IPs* *evet* *evet*	*aynı IPs* *evet* *evet*
$\mathbf{K}^{T} \neq \mathbf{K}^{L}$ (tam doğ. olm. rijitlik) Isıl etki gerilmelerine bağlı Yer değiştirmelere bağlı	*aynı IPs* *evet* *evet*	*aynı IPs* *evet* *evet*	*aynı IPs* *evet* *evet*	*aynı IPs* *evet* *evet*
$\mathbf{F}^{ext}$ (doğ. modelle aynı) Isıl etki gerilmelerine bağlı Yer değiştirmelere bağlı	• noktasal (analitik) • düzgün (3 Hammer noktası) • trapezoidal (3 Hammer noktası) *hayır* *hayır*	• noktasal (analitik) • düzgün (2 x 2 Gauss noktası) • trapezoidal (2 x 2 Gauss noktası) *hayır* *hayır*	• noktasal (analitik) • düzgün (6 Hammer noktası) • trapezoidal (6 Hammer noktası) *hayır* *hayır*	• noktasal (analitik) • düzgün (3 x 3 Gauss noktası) • trapezoidal (3 x 3 Gauss noktası) *hayır* *hayır*
$\mathbf{F}_{lin}^{\text{int}}$ Isıl etki gerilmelerine bağlı Yer değiştirmelere bağlı	*aynı IPs* *evet* *evet*	*aynı IPs* *evet* *evet*	*aynı IPs* *evet* *evet*	*aynı IPs* *evet* *evet*
$\mathbf{F}_{nl}^{\text{int}}$ Isıl etki gerilmelerine bağlı Yer değiştirmelere bağlı	*aynı IPs* *evet* *evet*	*aynı IPs* *evet* *evet*	*aynı IPs* *evet* *evet*	*aynı IPs* *evet* *evet*

III-6 BURULMAYA ÇALIŞAN EKSENEL SİMETRİK ELEMANLAR



BURULMAYA ÇALIŞAN DOĞRUSAL EKSENEL SİMETRİK ELEMANLAR

`model_axi_torsion_lin`

Mekanik model

Eksenel 3D elemanlara benzer şekilde bu elemanlar da geometrik olarak Z = 0 düzelemi içerisinde tanımlanırlar ve simetri eksenleri Y 'dir. Bu modeller için kabul, yer değiştirme, şekil değiştirme ve gerilme tanım alanlarının tam eksenel-simetriği şeklindedir. Bünye denklemleri, düzlem-şekil değiştirme modellerine benzer şekilde tam 3-D yasası çerçevesinde olmalıdır (XY düzlemi içerisinde izotropik ya da ortotropik).
Eksenel 3D modellerden farkı, izin verilebilir yerdeğiştirmenin tipidir. Bu elemanlar sadece Z ekseninde yer değiştirme tanım alanına sahiptir (düzlem dışı). Dikkate alınan yükler de sadece Z eksenindedir.

3D eksenel simetrik yükler hem `model_axi3d_lin`, hem de `model_axi_torsion_lin` (eşleştirilmemiş modeller) tanımınlarına ihtiyaç duyar. Yüklerin XY bileşenleri, `model_axi3d_lin` tanımı ve Z bileşeni ise `model_axi_torsion_lin` tanımı tarafından kullanılır.

Burulmaya çalışan doğrusal eksenel simetrik modeller küçük-şekil değiştirme teorisini temel almaktadır (doğrusal teori).

Kinematik, şekil değiştirmeler ve gerilmeler

Bu elemanlar her noktada sadece bir tane serbestlik derecesine sahiptir (global eksen bazlı Uz yer değiştirmesi). Şekil değiştirme/gerilme tensörleri (küçük şekil değiştirme teorisi) elemanın düzlemi içinde tanımlanmıştır (her tümleştirme noktasında):

ε_{xz}, ε_{yz}
σ_{xz}, σ_{yz}

Diğer terimler 0 olarak kabul edilir ($\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{xy} = 0$, $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma_{xy} = 0$).

Geometri

Bu elemanların kalınlıkları düzgün ve benzerdir (tek değer tanımlanmış halde). Bütün elemanlar model tanımının düzlemi içinde olmalıdır. İkinci dereceden elemanlar olan T6 ve Q9 eğrisel olamaz (ancak sınır hatları olabilir).

Önemli not:

Eksenel simetriye uymak için modelin Y aksına geçmemesi gerekmektedir.

Yükler

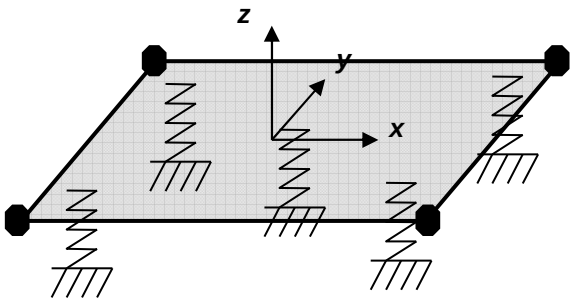
Mekanik yükler (KUVVET) noktasal, düzgün yayılı, trapezoidal yayılı olabilirler. Sadece yükün düzlem içindeki bölümü etkindir. Düzlem dışındaki bileşeni herhangi bir etki oluşturmaz.
Isıl yükler her eleman üzerinde düzgün ve doğrusal değişken şekilde olabilir.

Notlar

• Burulmaya çalışan doğrusal eksenel simetrik elemanın kütlesi ve sönüm değeri yoktur.
• Burulmaya çalışan doğrusal olmayan model "`model_axi_torsion_gNL`" bulunmamaktadır.
• Doğrusal 3-D eksenel model (U_X ve U_Y) ile doğrusal burulmaya çalışan modelin (Uz) kombinasyonu, tam eksenel bir model oluşturmaktadır.

	T3YÜZLÜ	**Q4YÜZLÜ**	**T6YÜZLÜ**	**Q9YÜZLÜ**
Geometri	düz	düz	düz (eğrisel sınırlar)	düz (eğrisel sınırlar)
Biçim fonksiyonları	*(3)*	*(4)*	*(5)*	*(6)*
Tip	izoparametrik	izoparametrik	izoparametrik	izoparametrik
Şekil değ. / ger.	düzgün	çift doğrusal	çift doğrusal	dördüncü dereceden
Toplam ser. der.	3	4	6	9
$\mathbf{K}^L$ Isıl etki gerilmelerine bağlı Yer değiştirmelere bağlı	3 Hammer noktası *hayır* *hayır*	2 x 2 Gauss noktası *hayır* *hayır*	6 Hammer noktası *hayır* *hayır*	3 x 3 Gauss noktası *hayır* *hayır*
$\mathbf{K}_0^\sigma$ Isıl etki gerilmelerine bağlı Yer değiştirmelere bağlı	*aynı IPs* *evet* *hayır*	*aynı IPs* *evet* *hayır*	*aynı IPs* *evet* *hayır*	*aynı IPs* *evet* *hayır*
$\mathbf{K}^T = \mathbf{K}^L$ Isıl etki gerilmelerine bağlı Yer değiştirmelere bağlı	*aynı IPs* *hayır* *hayır*	*aynı IPs* *hayır* *hayır*	*aynı IPs* *hayır* *hayır*	*aynı IPs* *hayır* *hayır*
$\mathbf{F}^{ext}$ Isıl etki gerilmelerine bağlı Yer değiştirmelere bağlı	• noktasal (analitik) • düzgün (3 Hammer noktası) • trapezoidal (3 Hammer noktası) *hayır* *hayır*	• noktasal (analitik) • düzgün (2 x 2 Gauss noktası) • trapezoidal (2 x 2 Gauss noktası) *hayır* *hayır*	• noktasal (analitik) • düzgün (6 Hammer noktası) • trapezoidal (6 Hammer noktası) *hayır* *hayır*	• noktasal (analitik) • düzgün (3 x 3 Gauss noktası) • trapezoidal (3 x 3 Gauss noktası) *hayır* *hayır*
$\mathbf{F}_{lin}^{\text{int}} = \mathbf{F}_{nl}^{\text{int}}$ Isıl etki gerilmelerine bağlı Yer değiştirmelere bağlı	*aynı IPs* *evet (doğrusal)* *evet (doğrusal)* $\mathbf{F}_{lin}^{\text{int}} = -\mathbf{K}^L\ \mathbf{U}$	*aynı IPs* *evet (doğrusal)* *evet (doğrusal)* $\mathbf{F}_{lin}^{\text{int}} = -\mathbf{K}^L\ \mathbf{U}$	*aynı IPs* *evet (doğrusal)* *evet (doğrusal)* $\mathbf{F}_{lin}^{\text{int}} = -\mathbf{K}^L\ \mathbf{U}$	*aynı IPs* *evet (doğrusal)* *evet (doğrusal)* $\mathbf{F}_{lin}^{\text{int}} = -\mathbf{K}^L\ \mathbf{U}$

III-7 YAYILI 2D YAY ELEMANLAR



YAYILI 2D DOĞRUSAL YAY ELEMANLAR

model_distributed_spring_2D

Mekanik model

Bu elemanlar bir yüzey üzerinde yayılmış yayları modeller. Yayları bir "yay kanunu" ve bir doğrultu (elemanlara normal doğrultuda olması gerekmez) tanımlamaktadır. Yay kanunu doğrusal ya da bir zemini, ilerleyen pekleşme/yumuşama ile tek yönlü doğrusal olmayan şekilde modelleyebilmek amacıyla doğrusal olmayan formda olabilir.
Bir modeldeki tüm elemanlar için doğrultu düzgündür.

Kinematik, şekil değiştirmeler ve gerilmeler

Bu elemanların her noktada üç serbestlik derecesine bulunmaktadır (global eksen bazlı üç yer değiştirme).
Şekil değiştirme/yer değiştirme tensörleri, elemanların düzlemi içerisinde her tümleştirme noktasında tanımlanır. Bunların hepsi yay doğrultusundaki tek bir değere indirgenir.
Şekil değiştirme, yay doğrultusundaki yer değiştirmedir. Gerilme ise her birim yüzeydeki yayılı yayın reaksiyonudur.

Geometri

Elemanların geometrisi açısından herhangi özel bir şart bulunmamaktadır. Sonlu elemanlar ağı eğrisel olabilir. İkinci dereceden T6 ve Q9 elemanlar ayrıca eğrisel olabilir.

Yükler

Yayılı yay modelleri üzerine sadece KUVVET yüklerinin tanımlanmasına izin verilmektedir. Yükler sonlu elemanların serbestlik derecelerine etkimektedir ve noktasal, düzgün yayılı, trapezoidal yayılı ve alan yükü (basınç/çekme ve yüzeyin normali doğrultusunda) olabilir.

Notlar

• Yaylar üzerinde bir ısıl genleşme tanımlanmasına izin verilmektedir. Yay kanunu ile birlikte ısıl genleşme katsayısının tanımlanması gerekmektedir.
• Sonlu elemanlar kütüphanesi içerisinde geometrik doğrusal olmayan yayılı yay modeli (elemanarın yüzeylerinde büyük oranlardaki değişimleri dikkate alan) bulunmamaktadır.
• Yayılı yay elemanın kütlesi ve sönüm değeri yoktur.

	T3YÜZLÜ	Q4YÜZLÜ	T6YÜZLÜ	Q9YÜZLÜ
Geometri	doğrusal	çift doğrusal	ikinci dereceden	dördüncü dereceden
Biçim fonksiyonları	*(3)*	*(4)*	*(5)*	*(6)*
Tip	izoparametrik	izoparametrik	izoparametrik	izoparametrik
Şekil değ. / ger.	doğrusal	çift doğrusal	ikinci dereceden	dördüncü dereceden
Toplam ser. der.	9	12	18	27
$\mathbf{K}^L$ Isıl etki gerilmelerine bağlı Yer değiştirmelere bağlı	3 Hammer noktası *hayır* *hayır*	2 x 2 Gauss noktası *hayır* *hayır*	6 Hammer noktası *hayır* *hayır*	3 x 3 Gauss noktası *hayır* *hayır*
$\mathbf{K}_0^\sigma$ Isıl etki gerilmelerine bağlı Yer değiştirmelere bağlı	*boş* *hayır* *hayır*	*boş* *hayır* *hayır*	*boş* *hayır* *hayır*	*boş* *hayır* *hayır*
$\mathbf{K}^T = \mathbf{K}^L$ Isıl etki gerilmelerine bağlı Yer değiştirmelere bağlı	*aynı IPs* *hayır* *hayır*	*aynı IPs* *hayır* *hayır*	*aynı IPs* *hayır* *hayır*	*aynı IPs* *hayır* *hayır*
$\mathbf{F}^{ext}$ Isıl etki gerilmelerine bağlı Yer değiştirmelere bağlı	• noktasal (analitik) • düzgün (3 Hammer noktası) • trapezoidal (3 Hammer noktası) *hayır* *hayır*	• noktasal (analitik) • düzgün (2 x 2 Gauss noktası) • trapezoidal (2 x 2 Gauss noktası) *hayır* *hayır*	• noktasal (analitik) • düzgün (6 Hammer noktası) • trapezoidal (6 Hammer noktası) *hayır* *hayır*	• noktasal (analitik) • düzgün (3 x 3 Gauss noktası) • trapezoidal (3 x 3 Gauss noktası) *hayır* *hayır*
$\mathbf{F}_{lin}^{\text{int}} = \mathbf{F}_{nl}^{\text{int}}$ Isıl etki gerilmelerine bağlı Yer değiştirmelere bağlı	*aynı IPs* *evet (doğrusal)* *evet (doğrusal)* $\mathbf{F}_{lin}^{\text{int}} = -\mathbf{K}^L\ \mathbf{U}$	*aynı IPs* *evet (doğrusal)* *evet (doğrusal)* $\mathbf{F}_{lin}^{\text{int}} = -\mathbf{K}^L\ \mathbf{U}$	*aynı IPs* *evet (doğrusal)* *evet (doğrusal)* $\mathbf{F}_{lin}^{\text{int}} = -\mathbf{K}^L\ \mathbf{U}$	*aynı IPs* *evet (doğrusal)* *evet (doğrusal)* $\mathbf{F}_{lin}^{\text{int}} = -\mathbf{K}^L\ \mathbf{U}$

III-8 YÜZEYSEL KÜTLE ELEMANLAR

`model_surf_mass`

Mekanik model

Yüzeysel kütle elemanlar sadece yer değiştirme serbestlik derecelerine uygulanmaktadır (dönme serbestlik derecelerine uygulanmaz). Bir plağa, kabuğa ya da düzlem-şekil değiştirme modeline yüzeysel kütle tanımlamak için kullanılmaktadır. Yüzeysel kütle modelini bir "skaler yasası" tanımlamaktadır. Skaler değer ise yüzeysel kütle yoğunluğudur (kalınlığı dikkate alan).

Geometri

Elemanların geometrisi açısından herhangi özel bir şart bulunmamaktadır. Sonlu eleman ağları eğrisel olabilir. İkinci dereceden T6 ve Q9 elemanlar ayrıca eğrisel olabilir.

Yükler

Kütle modelleri üzerine yük tanımlanmasına izin verilmemektedir.

Notlar

• Kütle matrisi sabittir ve güncel konfigürasyona bağlı değildir.
• Yüzeysel kütle elemanının rijitliği ve sönüm değeri yoktur.

	T3YÜZLÜ	**Q4YÜZLÜ**	**T6YÜZLÜ**	**Q9YÜZLÜ**
Geometri	doğrusal	çift doğrusal	ikinci dereceden	dördüncü dereceden
Biçim fonksiyonları	*(3)*	*(4)*	*(5)*	*(6)*
Tip Toplam ser. der.	izoparametrik 9	izoparametrik 12	izoparametrik 18	izoparametrik 27
$\mathbf{M}$ Isıl etki gerilmelerine bağlı Yer değiştirmelere bağlı	3 Hammer noktası *hayır* *hayır*	2 x 2 Gauss noktası *hayır* *hayır*	6 Hammer noktası *hayır* *hayır*	3 x 3 Gauss noktası *hayır* *hayır*
$\mathbf{F}^{inertia}$ Isıl etki gerilmelerine bağlı Hızlara bağlı	3 Hammer noktası *hayır* *evet (linearly)* $\mathbf{F}^{inertia} = -\mathbf{M}\,\mathbf{V}$	2 x 2 Gauss noktası *hayır* *evet (doğrusal)* $\mathbf{F}^{inertia} = -\mathbf{M}\,\mathbf{V}$	6 Hammer noktası *hayır* *evet (doğrusal)* $\mathbf{F}^{inertia} = -\mathbf{M}\,\mathbf{V}$	3 x 3 Gauss noktası *hayır* *evet (doğrusal)* $\mathbf{F}^{inertia} = -\mathbf{M}\,\mathbf{V}$

III-9 KABUK KÜTLE ELEMANLAR

`model_shell_mass`

Mekanik model

Kalın plaklar ve kabuklar için dönme rijitliği dikkate alınabilmektedir. Modal titreşim frekansları, daha büyük bir kütle matrisi ve daha uzun hesaplama süreleri gerektirmesine karşı bu dönme ataletleriyle birlikte bir miktar aşağı çekilebilmektedir.
Kabuk kütle elemanları, yer değiştirme ve dönme serbestlik derecelerinin her ikisine de uygulanmaktadır. Bir plak ya da kabuk modeline yüzeysel kütle ve dönme rijitliği tanımlamak için kullanılmaktadır. Kabuk kütle modelini bir "kabuk kütle yasası" tanımlamaktadır. Bir hacimsel kütle yoğunluğu (kalınlığı dikkate almayan) ve bir kalınlık belirtilerek iki parametreyle tarif edilir. Bu durumda dönme rijitlikleri standart değer olarak şu şekildedir:

$$I = \rho \frac{h^3}{12}$$

Geometri

Elemanların geometrisi açısından herhangi özel bir şart bulunmamaktadır. Sonlu eleman ağları eğrisel olabilir. İkinci dereceden T6 ve Q9 elemanlar ayrıca eğrisel olabilir.

Yükler

Kütle modelleri üzerine yük tanımlanmasına izin verilmemektedir.

Notlar

• Kütle matrisi sabittir ve güncel konfigürasyona bağlı değildir.
• Bu model sadece kabuklar için değil aynı zamanda plak modelleri için de geçerlidir.
• Kabuk kütle yasasında bir tarafsız yüzey kaçıklığı tanımlanabilmektedir. Bu durum, rijitlik terimlerinde bir membran-eğilme eşleştirmesine ve bununla beraber dönme rijitliğinde bir artışa sebep olur:

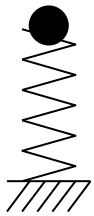
$$I = \rho \left(\frac{h^3}{12} + h\, z_0^2 \right)$$

• Kabuk kütle elemanını kullanmadan önce, daha basit formda olan genellikle çok benzer sonuçlar veren yüzeysel kütle elemanı kullanılması düşünülebilir.
• Kabuk kütle elemanının rijitliği ve sönüm değeri yoktur.

	T3YÜZLÜ	Q4YÜZLÜ	T6YÜZLÜ	Q9YÜZLÜ
Geometri	doğrusal	çift doğrusal	ikinci dereceden	dördüncü dereceden
Biçim fonksiyonları	*(3)*	*(4)*	*(5)*	*(6)*
Tip Toplam ser. der.	izoparametrik 18	izoparametrik 24	izoparametrik 36	izoparametrik 54
$\mathbf{M}$ Isıl etki gerilmelerine bağlı Yer değiştirmelere bağlı	3 Hammer noktası *hayır* *hayır*	2 x 2 Gauss noktası *hayır* *hayır*	6 Hammer noktası *hayır* *hayır*	3 x 3 Gauss noktası *hayır* *hayır*
$\mathbf{F}^{inertia}$ Isıl etki gerilmelerine bağlı Hızlara bağlı	3 Hammer noktası *hayır* *evet (linearly)* $\mathbf{F}^{inertia} = -\mathbf{M}\,\mathbf{V}$	2 x 2 Gauss noktası *hayır* *evet (doğrusal)* $\mathbf{F}^{inertia} = -\mathbf{M}\,\mathbf{V}$	6 Hammer noktası *hayır* *evet (doğrusal)* $\mathbf{F}^{inertia} = -\mathbf{M}\,\mathbf{V}$	3 x 3 Gauss noktası *hayır* *evet (doğrusal)* $\mathbf{F}^{inertia} = -\mathbf{M}\,\mathbf{V}$

IV- DİĞER ELEMANLAR

IV-1 YAYLAR



`spring, spring_directional`

Mekanik modeller

İki noktanın bazı serbestlik dereceleri arasında ya da bir nokta ile zemin arasında tanımlanan yaylardır.
Bir “yay” beş ana parametre ile tanımlanır:

- Bağlanacak iki nokta (ya da yalnızca bir noktayı zemine bağlamak için ikinci nokta -1 olarak ayarlanır).
- Bir tanım alanı tipi - YER DEĞİŞTİRME ya da DÖNME.
- Rijitlik değerini ($N.m^{-1}$) tanımlayan bir skaler denklem *K*, elastik ancak doğrusal olmayan da olabilir.
- Bir *D* yönü (`spring_directional`) - iki nokta arasındaki vektörlerden farklı olabilir.

Bir "yay" kuvveti şu şekilde yazılır:

$$K\,(U_1 - U_0)$$

burada:

• U_0 ve U_1 iki nokta arasındaki yerdeğiştirme değerleridir.

Yukarıdaki beş parametreye ilave olarak, yayı aşağıdaki şekilde düzenlemek için isteğe bağlı ağırlıklar (spring_directional) ayarlanabilir:

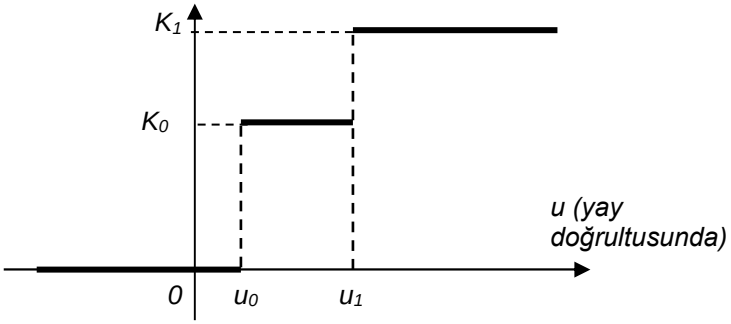
$$K\left(\sum_i \omega_i U_i\right)$$

Yükler

Yay üzerine yük tanımlanmasına izin verilmemektedir (ancak noktaları üzerinde tanımlanabilir).

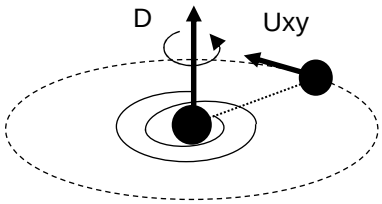
Notlar

- Bir yay için doğrusal olmayan denklemler kullanılabilir:



- Yay elemanda ısıl genleşme katsayısı yoktur.
- Yay elemanın kütlesi ya da sönüm değeri yoktur.

IV-2 BURULMA YAYI



spring_drill

Mekanik model

Bir noktanın dönme serbestlik dereceleri ve iki nokta arasındaki göreli yer değiştirme arasında tanımlanan yaylardır. Bir burulma yayı dört ana parametre ile tanımlanır:

- Bağlanacak iki nokta (ilk nokta dönmeleri tutan mesnet olarak).
- Bir dönme yönü *D*.
- Rijitlik değerini ($N.m^{-1}$) tanımlayan bir skaler denklem *K,* elastik ancak doğrusal olmayan da olabilir.

Bir burulma yayı şu şekilde tanımlanır:

$$K\ (\langle R_0, D\rangle - \langle V_{01} \times (U_1 - U_0), D\rangle)$$

burada:

- U_0 ve U_1 iki noktanın yer değiştirme değerleri
- R_0: birinci noktanın dönme değeri
- *D*: dönme yönü
- $V_{01} = \dfrac{P_1 - P_0}{\|P_1 - P_0\|^2}$

Bu tür bir yay örnek olarak bir kiriş tepesinin eksenel dönmesini bir kabuğun düzlem içi yer değiştirmesine birleştirmek için kullanılabilir. Bunlar ayrıca bir kirişi bir katı elemana ya da bir kabuk elemanı bir katı elemana birleştirmek için de kullanılabilirler.

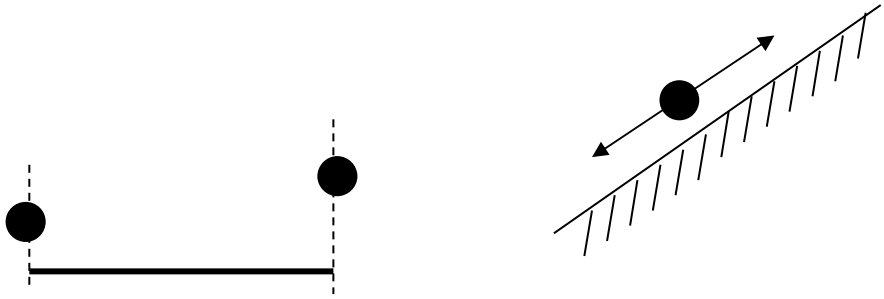
Yükler

Burulma yayı üzerine yük tanımlanmasına izin verilmemektedir (ancak noktalarına tanımlanabilir).

Notlar

- Burulma yayı için doğrusal olmayan denklemler kullanılabilir.
- Burulma yayında ısıl genleşme katsayısı yoktur.
- Burulma yayının kütlesi ya da sönüm değeri yoktur.

IV-3 BAĞLANTILAR



`link, link_directional`

Mekanik model

"Bağlantı" görüldüğü gibi iki nokta arasında ya da "zemin"le nokta arasında çok rijit bir yay olabilir. Birkaç yer değiştirme ya da belirli bir yönde birkaç dönme arasındaki denklemi uygulamak için kullanılabilir, örneğin $U_x(N_1)$ - $U_x(N_0)$ = 0. "Bağlantı" nın global bir aks boyunca olmasına gerek yoktur, bunun yerine belirli bir yönde de olabilir.
"Bağlantı" dört ana parametrede tanımlanır:

- Bağlantı kurulacak iki nokta (ya da ikinci nokta -1 e ayarlanı bir nokta "zemin" e bağlanır).
- Bir alan tipi - YER DEĞİŞTİRME ya da DÖNME.
- Yön *D* (`link_directional`) - iki nokta arasındaki vektörden farklı yönde olabilir.

"Bağlantı" şunu uygular:

$$U_1 - U_0 = 0$$

burada:

- U_0 ve U_1 iki noktadaki değer(yer değiştirme ya da dönme).

Yukarıdaki dört parametreye ek olarak, opsiyonel ağırlıklar (`link_directional`) bağlantıyı değiştirmek için ayarlanabilir:

$$\sum_i \omega_i U_i = 0$$

Serbestlik dereceleri "genelleştirilmiş" bu formülde karıştırılabilir.

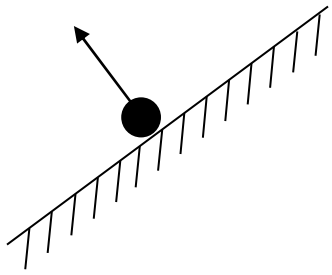
Yükler

Bağlantı elemanı üzerine yük tanımlanmasına izin verilmemektedir (ancak noktalarına tanımlanabilir).

Notlar

- *Penaltı* metodunda sayısal yöntem kullanılır.
- Bağlantı elemanında ısıl genleşme katsayısı yoktur.
- Bağlantı elemanının kütlesi ve sönüm değeri yoktur.

IV-4 DOĞRUSAL OLMAYAN BAĞLANTILAR



`link_gNL, link_directional_gNL`

Mekanik model

"Doğrusal olmayan bağlantı" yer değiştirme ya da serbestlik dereceleri dönmeleri arasındaki birkaç eşitsizliği uygulamak için kullanılabilir. Örneğin $U_x(N_1)$ - $U_x(N_0)$ >= 0. "Doğrusal olmayan bağlantı" nın global bir aks boyunca olmasına gerek yoktur, bunun yerine belirli bir yönde de olabilir.
"Doğrusal olmayan bağlantı" beş ana parametrede tanımlanır:

- Bağlantı kurulacak iki nokta (ya da ikinci nokta -1 'e ayarlanıp bir nokta zemine bağlanır).
- Bir alan tipi - YER DEĞİŞTİRME ya da DÖNME.
- Yön D (bağlantı yönü) - iki nokta arasındaki vektörden farklı yönde olabilir.
- Gevşeklik

"Doğrusal olmayan bağlantı" şunu uygular:

$$\|U_1 - U_0\| + slack \le 0 \quad \text{if } slack \le 0$$

ya da

$$\|U_1 - U_0\| - slack \ge 0 \quad \text{if } slack \ge 0$$

burada:

- U_0 ve U_1 iki noktadaki değer (yer değiştirme ya da dönme).

Yukarıdaki beş parametreye ek olarak, opsiyonel (`link_directional_gNL`) ağırlıklar bağlantıyı değiştirmek için ayarlanabilir:

$$\sum_i \omega_i U_i + slack \le 0$$

ya da

$$\sum_i \omega_i U_i + slack \ge 0$$

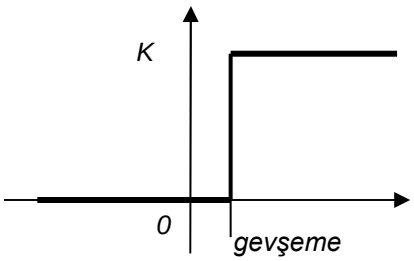
Serbestlik dereceleri "genelleştirilmiş" bu formülde karıştırılabilir.

Yükler

Doğrusal Olmayan Bağlantı üzerine yük tanımlanmasına izin verilmemektedir (ancak noktalarına tanımlanabilir).

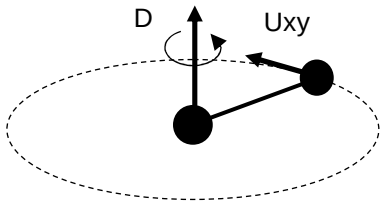
Notlar

- *Penaltı* methodunda sayısal yöntem kullanılır.
- "Doğrusal olmayan bağlantı" doğrusal olmayan oran yasasını kullanır. Rijitlik negatif değerler (tep. pozitif) ve çok yüksek (penaltı faktörü) pozitif değerler (tep. negatif) için sıfırdır.



- Doğrusal olmayan bağlantıda ısıl genleşme katsayısı yoktur.
- Doğrusal olmayan bağlantının kütlesi ve sönüm değeri yoktur.

IV-5 BURULMA BAĞLANTISI



link_drill

Mekanik model

Bir noktanın dönme serbestlik derecesini(lerini) ve iki noktanın yer değiştirmelerini birbiirine bağlar.
"Burulma bağlantısı" üç ana parametre ile tanımlanır:

- Bağlanacak iki nokta (ilki nokta dönmeye karşı mesnetlemiş)
- Dönme yönü *D*.

"Burulma bağlantısı" şunu uygular:

$$\langle R_0, D\rangle - \langle V_{01} \times (U_1 - U_0), D\rangle = 0$$

burada:

- U_0 ve U_1 iki noktanın yer değiştirme değerleri.
- R_0: İlk noktanın dönmesi.
- *D*: Dönmenin yönü.
- $V_{01} = \dfrac{P_1 - P_0}{\|P_1 - P_0\|^2}$

Bu bir kiriş ucundaki eksenel dönmenin kabuğunun düzlemi içindeki yer değiştirmesine örnek için kullanılabilir. Bunun yanı sıra bir kirişi katı bir cisime (iki burgulu bağlantı çifti ve üç tane aynı hizada olmayan nokta gereklidir) ya da bir kabuğu bir katı bir cisime bağlamak için kullanılabilir.

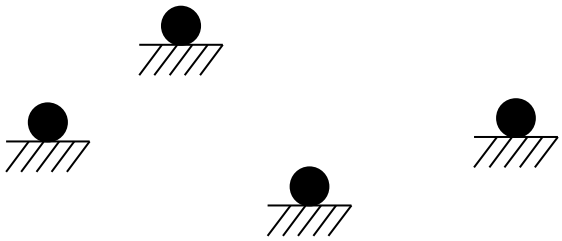
Yükler

Burulma bağlantısı üzerine yük tanımlanmasına izin verilmemektedir (ancak noktalarına tanımlanabilir).

Notlar

- *Penaltı* methodunda sayısal yöntem kullanılır.
- Doğrusal olmayan yasalar "burulma bağlantısı" için kullanılabilir.
- Burulma bağlantısında ısısal genleşme oranı yoktur.
- Burulma bağlantısının kütlesi ve sönüm değeri yoktur.

IV-6 NOKTASAL BLOKAJ YAYLAR



`block_stops`

Mekanik model

Görüldüğü gibi bazı noktalar üzerinde çok rijit yaylar yığınıdır.
"Noktasal blokaj yaylar" dört parametre ile tanımlanır:

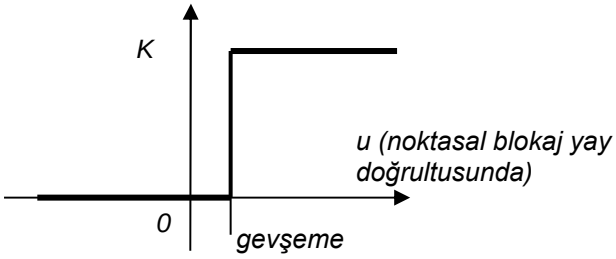
- A - Noktasal blokaj yayların uygulanacağı noktalar yığını
- Bir alan tipi - YER DEĞİŞTİRME ya da DÖNME
- Yön
- Opsiyonel bir "gevşeklik" parametresi

Yükler

Noktasal Blokaj Yaylar üzerine yük tanımlanmasına izin verilmemektedir (ancak noktalarına tanımlanabilir).

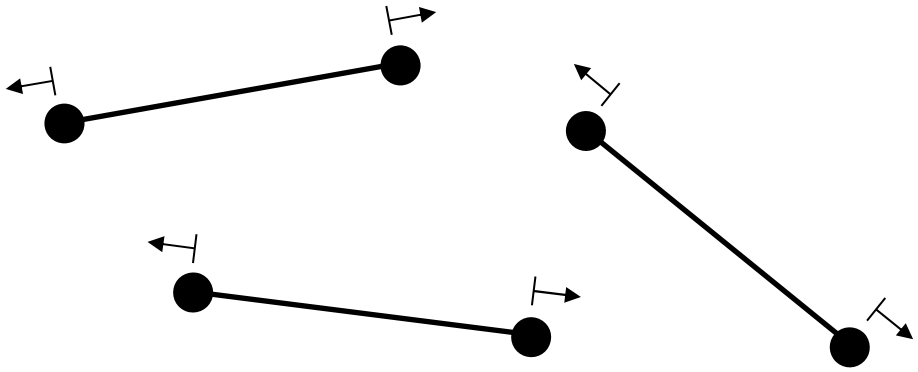
Notlar

- *Penaltı* methodunda sayısal yöntem kullanılır.
- Noktasal blokaj yaylar aynı doğrusal oran yasası ile tanımlı doğrusal olmayan bağlantı takımı ile modellenir. Rijitlik, belirtilen yöndeki negatif yer değiştirme için sıfırdır:



- Noktasal blokaj yaylarda ısıl genleşme katsayısı yoktur.
- Noktasal blokaj yayların kütlesi ve sönüm değeri yoktur.

IV-7 BAĞ-ÇUBUKLARI



`tie_rods`

Mekanik model

Göründüğü gibi özdeş doğrusal olmayan sadece çekmeye (ya da sadece basınca) çalışan çubuklar yığınıdır. “Bağ-çubuğu” altı ana parametre ile tanımlanır:

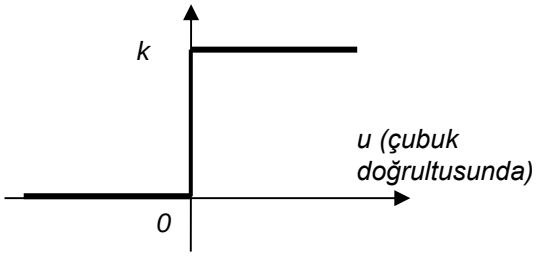
- Çubukların noktalarının tanımını veren (kolonlar gibi) bağlantı matrisi.
- Rijitlik değeri *k*, çubuklar çekme etkisinde olduğu zaman (ya da basınç).
- Çubuklar için kesit değeri *S*.
- Isıl genleşme katsayısı α .
- Ön şekil değiştirme değeri ε .
- Eğer çubuklarlar yalnızca çekme (ön tanımlı) ya da yalnızca basınç etkisi altındaysa opsiyonel bir işaret belirtilir.

Yükler

Bağ çubukları üzerine yük tanımlanmasına izin verilmemektedir (ancak noktalarına tanımlanabilir).

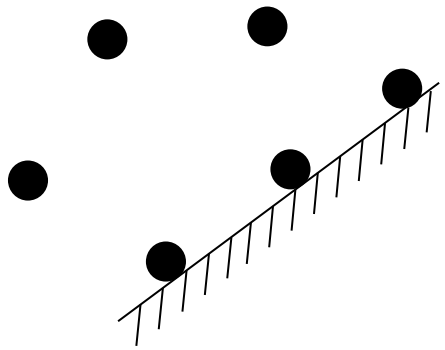
Notlar

• "Bağ-çubuğu", aynı doğrusal olmayan yay yasası ile birleştirilmiş doğrusal çubuklar serisi ile modellenmektedir. Çubuk yönündeki negatif yer değiştirmeler için rijitlik sıfır ve diğer yönde ise *k* değeridir:



- Bağ çubuğunun ısıl genleşme katsayısı yoktur.
- Bağ çubuğunun kütlesi ya da sönüm değeri yoktur.

IV-8 TEMASLAR (DÜZLEMSEL/SİLİNDİRİK/KÜRESEL)



contact_plane
contact_cylinder
contact_sphere

Mekanik model

Bir grup nokta ve bir düzlem arasındaki temas modelleridir (sırasıyla silindir, küre).
“Noktasal blokaj yaylar”ın aksine, bir “temas düzlemi” (sırasıyla silindir, küre) düzlem tarafından tanımlanan "pozitif" yarı-alan içinde kalması şartıyla noktaların her yönde serbestçe hareket etmesine izin vermektedir (tep. silindir/küre dışında ya da içinde).

Üç “temas” elamanı aşağıdaki şekilde tanımlanır:

- Penetrasyonsuz olduğu kontrol edilen bir grup nokta.
- Opsiyonel bir “gevşeme” parametresi.
- Düzlem üzerindeki bir referans noktası (sırasıyla silindirin ekseni boyunca, kürenin merkezinde).

Buna ilave olarak, bir “temas düzlemi/silindir” elemanı:

- Noktaların serbestçe hareket etmesine izin verilen "pozitif" yarı-alanı tanımlayan bir yön (silindir ekseninin yönü) de kullanır.

Buna ilave olarak, bir “temas silindiri/küre” elemanı:

- Bir yarıçap (noktaların silindir/kürenin yalnızca içinde hareket etmesine izin verildiğinde negatif) da kullanır.

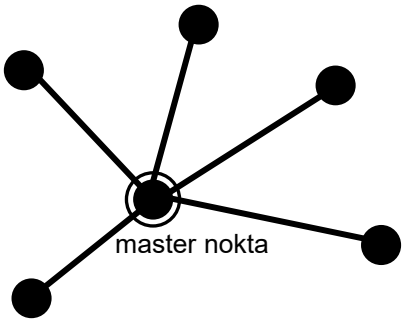
Yükler

Temas elemanı üzerine yük tanımlanmasına izin verilmemektedir (ancak noktalarına tanımlanabilir).

Notlar

- Kullanılan sayısal metod *penaltı metodudur*.
- Bir “temas” elemanı çok rijit doğrusal olmayan yaylar seti ile modellenir. Denklem rijitliği düzlemin pozitif yarı-alanı içinde kalması şartıyla sıfırdır (tep. silindir/küre dışında ya da içinde).
- Temas elemanında ısıl genleşme katsayısı yoktur.
- Temas elemanının kütlesi ya da sönüm değeri yoktur.

IV-9 RİJİT CİSİMLER (DOĞRUSAL VE DOĞ. OLMAYAN)



`rigid_body_lin, rigid_body_gNL`

Mekanik model

"Rijit cisim", bir *master* nokta ve çok sayıda *slave* noktalar arasındaki çoklu bir bağlantıdır. Her bir slave nokta: N_i 'nin master nokta N_m 'nin yer değiştirme ve dönme (eğer varsa) kontrollü rijit-cisim hareketini izlemesi belirtilmektedir.

Aralarındaki bağıntılar küçük yer değiştirme formu içerisinde şöyle yazılır:

$$U_i = U_m + \omega_m \times P_m P_i$$
$$\omega_i = \omega_m$$

Büyük yer değiştirme formu içerisinde ise şöyle yazılır:

$$U_i = U_m + \left(R(\omega_m) - Id\right) P_m P_i$$
$$\omega_i = \omega_m$$

burada $R(\omega)$ dönme matrisi ve *Id* ise özdeşlik matrisidir. Bu durumda rijitlik matrisi doğrusal değildir (ayrıca bir geometrik rijitlik matrisi bulunmaktadır K^{σ}).

Her bir *slave* nokta ve *master* nokta arasındaki mesafe, bütün *slave* noktalar arasındaki mesafe gibi aynı kalmaktadır.

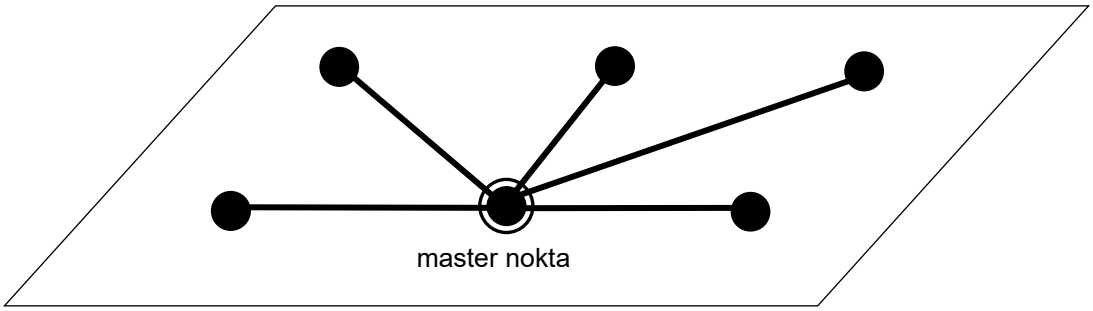
Yükler

Rijit cisim üzerine yük tanımlanmasına izin verilmemektedir (ancak noktalarına tanımlanabilir).

Notlar

- Kullanılan sayısal metod *penaltı metodudur*.
- Rijit cisimin yalnızca yer değiştirme serbestlik derecelerini sınırlandırmak mümkündür. Bu durumda, ikinci ilişki: $\omega_i = \omega_n$ ortadan kalkar.
- Rijit cisimde ısıl genleşme katsayısı yoktur.
- Rijit cisimin kütlesi ya da sönüm değeri yoktur.

IV-10 RİJİT DİYAFRAMLAR (DOĞRUSAL VE DOĞ. OLM.)



`rigid_diaphragm_lin, rigid_diaphragm_gNL`

Mekanik model

Bir "rijit diyafram" belirli bir düzlemde yer alan rijit bir cisimdir (X, Y ya da Z). Örnek olarak, Z düzleminde tanımlanan bir rijit diyafram Ux, Uy and Rz serbestlik derecelerini rijit olarak birbirine bağlamaktadır (Uz, Rx ve Ry eşleştirilmemiş olarak kalmaktadır).

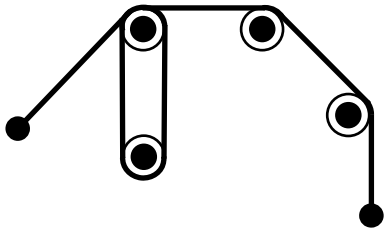
Yükler

Rijit diyafram üzerine yük tanımlanmasına izin verilmemektedir (ancak noktalarında tanımlanabilir).

Notlar

- Kullanılan sayısal metod *penaltı metodudur*.
- Rijit diyaframda ısıl genleşme katsayısı yoktur.
- Rijit diyaframın kütlesi ya da sönüm değeri yoktur.

IV-11 KABLOLAR (RİJİT VE RİJİT OLMAYAN)



cable, cable_rigid

Mekanik model

Kablolar birçok nokta (makara) etrafından geçen ve başlangıç ve bitiş noktalarından tutulu olan ip ya da zincir gibi elemanlardır.
Kablolar, `cable_rigid` 'in pratikte esnemeyi engelleyecek kadar yüksek bir ön tanımlı rijitliğe (penaltı rijitliği) sahip olması durumunda, bir skaler yasaya (doğrusal ya da değil) bağlı olarak bir miktar elastisite verilmiş olan elemanlardır.
Gevşeklik tanımlanabilir ("kablo" yasasına ve `cable_rigid` tanımına uygun şekilde).

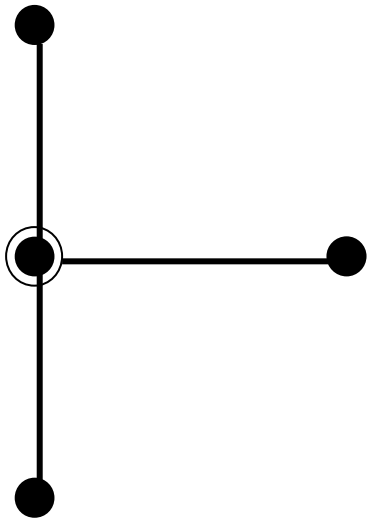
Yükler

Kablo elemanları üzerine yük tanımlanmasına izin verilmemektedir (ancak noktalarına tanımlanabilir).

Notlar

- `cable_rigid` elemanlarda, sayısal metod olarak *penaltı metodu* kullanılır.
- Kablo elemana ısıl genleşme katsayısı etkitilebilir.
- Kablo elemanın kütlesi ve sönüm değeri yoktur.

IV-12 MAFSAL (YAVAŞÇA GEVŞEYEN)



hinge

Mekanik model

"Mafsal", tam gevşeklik[30] ve tam bağlantı arasında bir tanımdır. Elemanlar, tam serbestlikte olduğu gibi aynı düğüm noktasında farklı serbestlik derecelerine sahiptirler, ancak serbestlik dereceleri birbirlerinden tamamen bağımsız değildir. Elemanlar birbirlerine "yaylar" ile eşleştirilmiştir.

Yükler

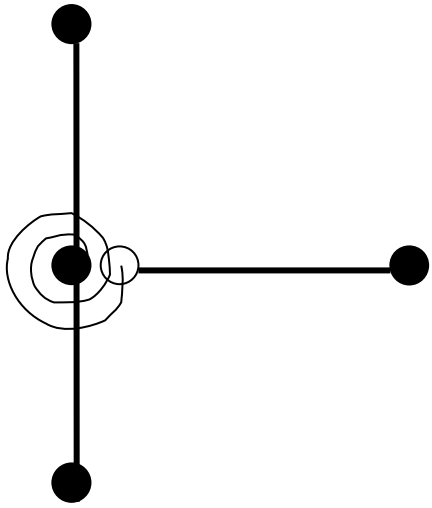
Mafsal elemanı üzerine yük tanımlanmasına izin verilmemektedir (ancak noktalarına tanımlanabilir).

Notlar

- Mafsallar sadece kiriş ve çubuk elemanlarda kullanılabilir.
- Mafsallar, global RX, lokal UZ vb. gibi özel bir tanım alanında tanımlanabilir.
- Bir "mafsal" tam serbestlik ve "yay" kullanılarak tanımlanabilir.
- Bir boş yay kanunu kullanılabilir. Bu durum "mafsal" elemanı bir "tam gevşeklik" ile eşdeğer yapmaktadır. Aksi durumda, elemanlar çok büyük bir rijitlik ile bağlanacaktır.
- Mafsal elemanlarda ısıl genleşme katsayısı yoktur.
- Mafsal elemanların kütlesi ve sönüm değeri yoktur.

[30] *"Tam gevşeklik" elemanlar arasındaki bağımsızlığı modellemek için kullanılır. Tam gevşeklik ile bağlanan elemanlar, sonlu elemanlar ağı içinde aynı noktayı paylaşırar fakat birbirlerinden bağımsız olarak hareket edebilen farklı serbestlik derecelerine sahiptirler.*
"Tam gevşeklik" hakkında daha detaylı bilgi için "Kullanım Kılavuzu" dosyasına bakınız.

IV-13 ZAYIF ETKİLEŞİMLİ KAÇIKLIK



`soft_offset`

Mekanik model

Elemanlar başlangıçtaki noktalarından kaçık ve başlangıç noktalarına zayıf bir linkle bağlı olarak davranmaktadırlar. Zayıf etkileşimli kaçıklığı tanımlamak için bir güçlü etkileşimli kaçıklık[31] ve bir mafsal kullanılır.

Yükler

Zayıf etkileşimli kaçıklık elemanı üzerine yük tanımlanmasına izin verilmemektedir (ancak noktalarına tanımlanabilir).

Notlar

- Kaçıklık (güçlü ya da zayıf) kiriş/çubuk elemanlarda kullanılabilir.
- Zayıf etkileşimli kaçıklık elemanlarında ısıl genleşme katsayısı yoktur.
- Zayıf etkileşimli kaçıklık elemanlarının kütlesi ve sönüm değeri yoktur.

[31] Bir eleman içindeki "güçlü etkileşimli kaçıklık", elemanın bir noktasının sonlu elemanlar ağı içindeki gerçek konumundan farklı bir noktada dikkate alınmasını sağlamaktadır. Örneğin; bir kiriş eleman, sonlu eleman ağı konumundan "kaçık" olarak dikkate alınarak ağda yeni bir nokta oluşumundan kaçınılabilir. "Güçlü etkileşimli kaçıklık" durumunda gerçek nokta ile "fiktif" kaçık nokta güçlü olarak bağlanmış haldedir.
"Güçlü etkileşimli kaçıklık" hakkında daha detaylı bilgi için "Kullanım Kılavuzu" dosyasına bakınız.

IV-14 NOKTASAL KÜTLE

`mass_punctual`

Mekanik model

"Noktasal kütle" bir noktada tanımlı olan kütle değeridir. Aynı kütle değeri üç global doğrultuda da etki etmektedir. Ayrıca, kütlenin deplasman serbestlik derecelerine ve dönme serbestlik derecelerine (dönme ataleti) iki farklı değer tanımlanabilir. Ek olarak, bileşke vektör kütlenin poziyonundan kaçıklık tanımlamak için de kullanılabilir. Bu durum kütle matrisi ile deplasman ve dönme serbestlik dereceleri arasında bağlantı kurmayı sağlamaktadır.

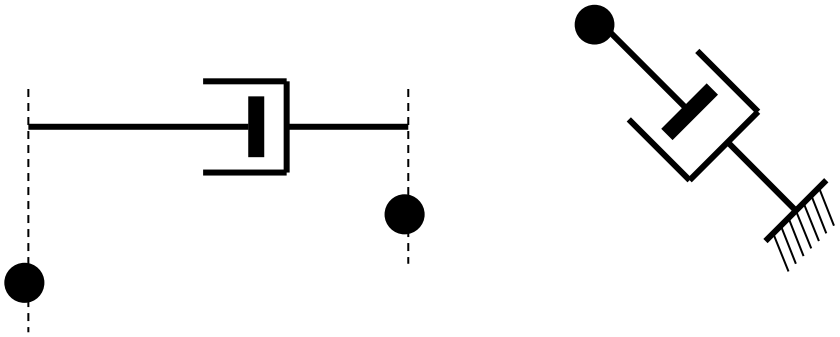
Yükler

Noktasal kütle elemanı üzerine yük tanımlanmasına izin verilmemektedir (ancak noktasına tanımlanabilir).

Notlar

- Noktasal kütle elemanının rijitliği ve sönüm değeri yoktur.

IV-15 VİSKOZ SÖNÜMLEYİCİ



`dash_pot, dash_pot_directional`

Mekanik model

"Viskoz sünümleyici" viskoz davranış ile sönümleme yapan bir elemandır. Viskoz sönümleyici iki nokta arasında ya da nokta ile "zemin" arasında hız ile orantılı olarak belirli bir yönde bir kuvvet oluşturmak için kullanılır.
"Yay" durumunda olduğu gibi "viskoz sönümleyici" yasası da beş ana parametreye bağlıdır:

- İki nokta birbirine bağlıdır (ya da ikinci noktalardan bir tanesi zeminde ise diğer nokta -1 değerini alır).
- Alan tipi - YER DEĞİŞTİRME ya da DÖNME.
- Yön *D* - iki nokta arasındaki vektör ile tanımlanabilir.
- "Skaler yasa" *C* sönüm değerini ifade etmektedir ($N.m^{-1}.s$) - doğrusal olmayan olabilir.

V0 and *V1* iki noktanın *D yönündeki hız değerlerini ifade eder*. "Viskoz sönümleyici":

*C * (V1 – V0)*

Yukarıdaki beş parametreye ek olarak, opsiyonel ağırlık (`dash_pot_directional`) kullanılarak "viskoz sönümü" bulmak için:

$$C\left(\sum_i \omega_i U_i\right)$$

Serbestlik derecesi tipleri bu “genelleştirilmiş” formül kullanılarak birleştirilebilir.

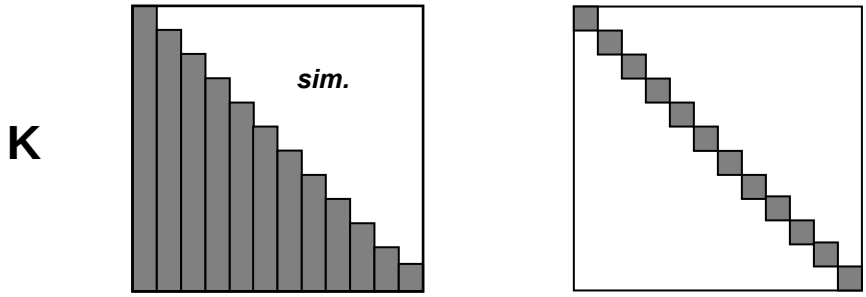
Yükler

Viskoz sönümleyici eleman üzerine yük tanımlanmasına izin verilmemektedir (ancak noktalarına tanımlanabilir).

Notlar

- Viskoz sönümleyici elemanın kütlesi ve sönüm değeri yoktur.

IV-16 KULLANICI TANIMLI RİJİTLİK



`stiffness_sym, stiffness_diag`

Mekanik model

"Kullanıcı tanımlı rijitlik", serbestlik derecesi vektörünü gösteren simetrik ya da diyagonal bir matristir.

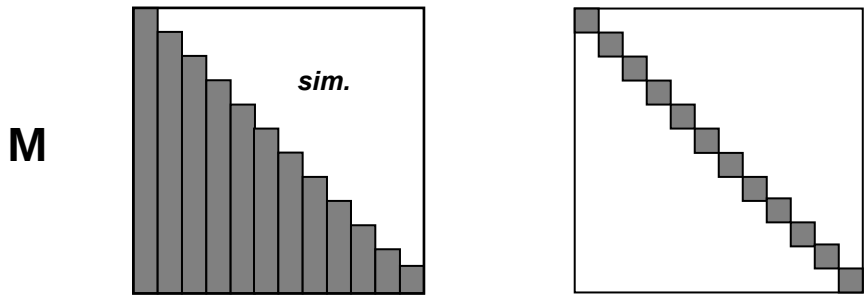
Yükler

Kullanıcı tanımlı rijitlik üzerine yük tanımlanmasına izin verilmemektedir (ancak noktalarına tanımlanabilir).

Notlar

- Kullanıcı tanımlı rijitlik elemanının kütlesi ve sönüm değeri yoktur.
- Matriste hiçbir kontrol yoktur. Herhangi bir değeri alabilir.
- Serbestlik derecesi vektörünün boyutları, matrisin ölçülerine eşit olmalıdır.
- Matrisin değeri doğrusal olmayan Newton iterasyonu sırasında geri bildirim denetimcisi kullanılarak güncellenmektedir.

IV-17 KULLANICI TANIMLI KÜTLE



`mass_sym, mass_diag`

Mekanik model

"Kullanıcı tanımlı kütle", serbestlik derecesi vektörünü gösteren simetrik ya da diyagonal bir matristir. Matris bir sabit olarak kabul edilir.

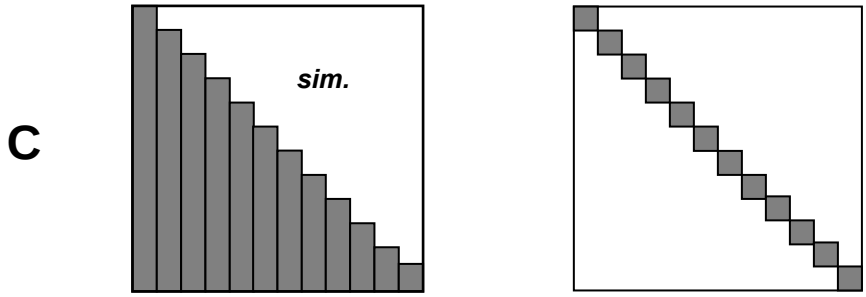
Yükler

Kullanıcı tanımlı kütle üzerine yük tanımlanmasına izin verilmemektedir (ancak serbestlik dereceleri üzerinde tanımlanabilir).

Notlar

- Kullanıcı tanımlı matrisin rijitliği ya da sönüm değeri yoktur.
- Matris üzerinde herhangi bir kontrol yapılmamaktadır. Bunlar herhangi bir değer tutabilirler.
- Serbestlik derecesi indisi vektörünün büyüklüğü matrisin ölçülerine eşit olmalıdır.

IV-18 KULLANICI TANIMLI SÖNÜM



`damping_sym, damping_diag`

Mekanik model

"Kullanıcı tanımlı sönüm", serbestlik derecesi vektörünü gösteren simetrik ya da diyagonal bir matristir. Matris bir sabit olarak kabul edilir.

Yükler

Kullanıcı tanımlı sönüm"üzerine yük tanımlanmasına izin verilmemektedir.

Notlar

- Kullanıcı tanımlı sönümün rijitliği ve sönüm değeri yoktur.
- Matriste kontrol yapılmaz. Herhangi bir değerde olabilir.
- Serbestlik derece indekslerinin vektör boyutları matris boyutlarına eşit olmalıdır.
- *Çarpık* simetrik sönüm matrisi `damping_sym` modeli ile de tanımlanabilir (derleyicide özel bir işaret kullanılır). Bu durumda diyagonal sıfır olarak düşünülür. Çarpık-simetrik sönüm sadece jiroskopik model analizinde kullanılır (korunumlu sistem) ve diğer tüm analiz modellerinde göz ardı edilir.

IV-19 RAYLEIGH SÖNÜMÜ

$$\mathbf{C} = \alpha\,\mathbf{K} + \beta\,\mathbf{M}$$

`Rayleigh_damping`

Mekanik model

"Rayleigh sönümü" her biri oransal değerle (α ve β) ağırlıklandırılmış bir rijitlik modeli ve bir kütle modelinden oluşturulur. Sönümlemenin bu formu, mekanik sistemin geçici dinamik denklemlerini birçok bağımsız modal skaler denklemine ayırmasına olanak sağladığı (diyagonalleştirme) ve bu sayede birçok hesaplamayı basitleştirdiği için sık kullanılmaktadır.

Yükler

Rayleigh sönümü üzerine yük tanımlanmasına izin verilmemektedir.

Notlar

- Rayleigh sönümünün rijitliği ve kütlesi yoktur.

[BAT] J.L. Batoz, G. Dhatt, "Modélisation des structures par éléments finis – Poutres et Plaques", Hermès, Paris (1990).
[CIA] Ciarlet P.G., "Mathematical Elasticity", vol 1, North-Holland (1988).
[NAF] NAFEMS, "A finite element primer", National Agency for Finite Element Methods and Standards", U.K. (1986).
[HIB] Hibbitt H.D., Marçal P.V., Rice J.C., "A finite element formulation for problems of large strain and large displacement", *Int. J. Solids Struct*., 6, 1069-1086 (1970).
[HUA] H.C. Huang, "A new nine node degenerated shell element with enhanced membrane and shear interpolation", *Int. J. Num. Methods Eng*., 22, 73-92 (1986).
[HUG] Hughes T.J., "The Finite Element Method – Linear static and dynamic finite element analysis", Prentice-Hall (1987).
[ZIE] Zienkiewicz O.C., "The Finite Element Method", 4th edition, Mc Graw Hill (1989).